



Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux : modélisations, visualisations en hyperspace

Gilles Baroin

► To cite this version:

Gilles Baroin. Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux : modélisations, visualisations en hyperspace. Musique, musicologie et arts de la scène. Université Toulouse le Mirail - Toulouse II, 2011. Français. NNT : 2011TOU20120 . tel-00943407

HAL Id: tel-00943407

<https://theses.hal.science/tel-00943407>

Submitted on 7 Feb 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 2 Le Mirail (UT2 Le Mirail)

Présentée et soutenue par :

Gilles BAROIN

Le 5 décembre 2011

Titre :

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux.
Modélisations, visualisations en hyperespace

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED ALLPH@ : Musique

Unité de recherche :

Lettres, Langues et Arts (LLA Créatis)

Directeur(s) de Thèse :

Louis FERRÉ, Professeur Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)
Jean-Michel COURT, MDC en Musicologie (LLA Créatis - Université Toulouse 2)

Rapporteurs :

Moreno ANDREATTA, HDR Mathématiques, CNRS, Ircam - Paris
Arnaud PÊCHER, Professeur, Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)

Autre(s) membre(s) du jury :

Emmanuel AMIOT, Docteur en Sciences de l'Informatique, CPGE - Perpignan

Thèse en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Université Toulouse II-Le Mirail - Laboratoire LLA- Créatis

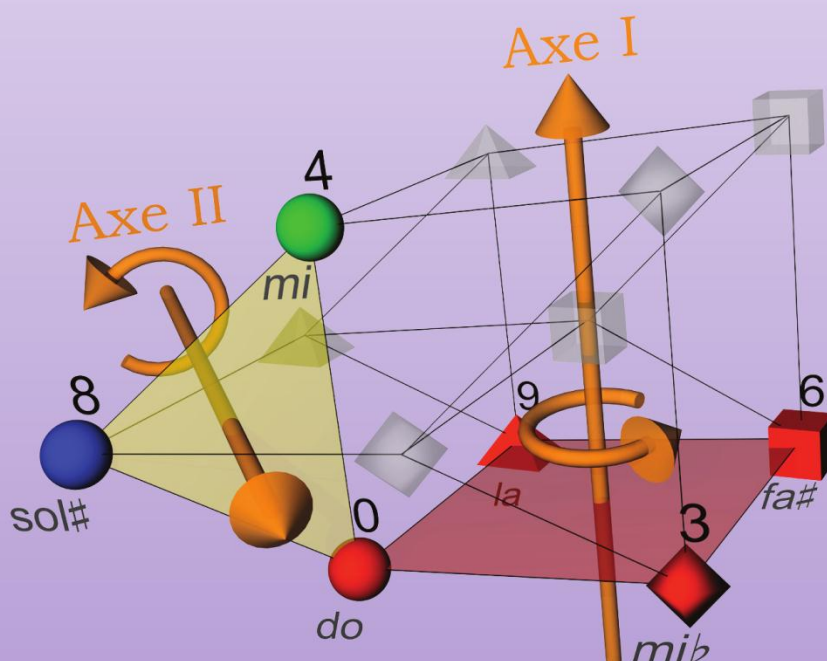
• Spécialité Musique •

Présentée et soutenue publiquement par

Gilles BAROIN

Le 5 décembre 2011

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperespace



Sous la direction de

Louis FERRÉ - Professeur de Mathématiques, Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)

Jean-Michel COURT - Maître de Conférences en Musicologie, (LLA Créatis, Université de Toulouse 2)

JURY

Présidente du jury

Sylviane R. SCHWER - Professeur de Mathématiques discrètes & Linguistique,
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

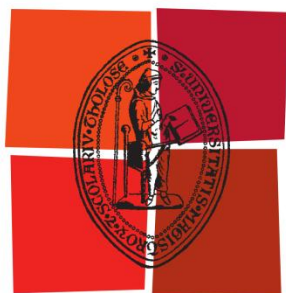
Rapporteurs

Moreno ANDREATTA - Chercheur en Musicologie Computationnelle, HDR Mathématiques,
Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique (CNRS, Ircam - Paris)

Arnaud PÊCHER - Professeur en Informatique et Mathématiques,
Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)

Examineur

Emmanuel AMIOT - Agrégé de Mathématiques, Docteur en Sciences de l'Informatique,
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE), Perpignan



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *Université Toulouse II Le Mirail*

Discipline ou spécialité : *Musique*

Présentée et soutenue par *Gilles BAROIN*
Le 5 décembre 2011

**Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux.
Modélisations, visualisations en hyperspace**

Ecole doctorale : Arts, Lettres, Langues, Philosophie, Communication (Allph@)

Unité de recherche : Lettres, Langues et Arts (LLA Créatis)

Directeurs de Thèse

*Louis FERRÉ, Professeur de Mathématiques,
Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)*

*Jean-Michel COURT, Maître de Conférences en Musicologie,
(LLA Créatis, Université de Toulouse 2)*

Présidente du jury

*Sylviane R. SCHWER - Professeur de Mathématiques discrètes & Linguistique,
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord*

Rapporteurs

*Moreno ANDREATTA, Chercheur en Musicologie Computationnelle, HDR Mathématiques,
Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique (CNRS, Ircam - Paris)*

*Arnaud PÉCHER, Professeur en Informatique et Mathématiques,
Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)*

Autre membre du jury

*Emmanuel AMIOT, Agrégé de Mathématiques, Docteur en Sciences de l'Informatique,
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE), Perpignan*

"I suppose one might find it necessary to pass into the fourth dimension "¹

Deux garçons de treize ans sont allongés dans des lits placés côte à côte, convalescents de la grippe qui les a confinés dans cette chambre de malade.

"Coxeter, comment penses-tu que le voyage dans le temps deviendra possible ?" demande John Petrie, l'un des deux garçons.

"Tu veux dire comme dans H. G. Wells ?" répond Donald Coxeter, l'autre garçon. L'œuvre classique de science-fiction écrite par H. G. Wells, "La Machine à explorer le temps", est un sujet de conversation populaire. Les deux garçons croient que le voyage à travers le temps finira par devenir possible. Après quelques instants Coxeter répond : "Je pense qu'il sera nécessaire de passer dans la quatrième dimension." C'est à cette époque que Coxeter commence à former les idées concernant les géométries des dimensions supérieures qu'il développera plus tard.²

¹ "Je pense qu'il sera nécessaire de passer dans la quatrième dimension".

² Texte issu de la biographie de Coxeter (Shell, 2001) reproduit avec l'aimable autorisation de l'auteur.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'encontre de mes directeurs de thèse, des membres du jury et rapporteurs, ainsi qu'envers toutes les personnes, artistes, chercheurs ou administratifs qui m'ont soutenu et supporté, dans ce travail.

Et plus personnellement : ma famille, Denise, Marie-Laure et Garance, qui ont supporté un thésard vivant dans une autre dimension, et feu mon père, Guy, qui me mis aux maths et à la flûte tout petit.

Les musiciens et autres artistes

Jean Luc Amestoy qui m'a relu et fait la gentillesse de tester les modèles.

Laval "*Thelonious*" Fabien, le pianiste qui "pense avec les chiffres" et a testé mes modèles avec entrain.

Charles Giuliani, peintre numérique, complice et complément, pour notre collaboration de longue date.

HerrZ, mon ami poète, que j'ai fait souffrir avec la musique électronique.

Pierre Jodlowski, pour ses conseils spécialisés et pertinents.

Renaud le Luron, pour son soutien amical et logistique.

Anne Ribout qui a créé ma première sculpture 4D.

Raimond Sainflou, pour ses conseils professionnels en vidéo.

Claude Sauvage, pour ses précisions concernant le monde de l'accordéon.

Marco Toledo, qui m'a encouragé dès le début et a découvert les intérêts pédagogiques de mes travaux.

Driss de Toulouse et Akufen qui se sont prêtés à la dure expérience des mathématiques dans le Rap et la Techno.

Enfin, Les musiciens de "Parler Flûtes" ainsi que tous ceux qui ont eu la patience de tester mes systèmes : Mel Dogman, Kedi, Swai, Venus, ainsi que les petits et grands visiteurs des musées et expositions où le modèle *Planet* a été présenté.

Les mathématiciens et autres scientifiques

Romain Boulet, pour ses idées circulantes et efficaces.

Charles Delorme, pour ses conseils et son travail de référence sur Cayley

Louis Ferré, mon directeur de thèse coté math, pour son soutien précieux et continu, qui m'a *converti* aux graphes et surtout à la théorie spectrale, me permettant ainsi de pouvoir publier dans ce milieu.

Etienne Fieux, pour son assistance exceptionnelle et le bon temps passé à *démontrer* des graphes ou les plonger dans des dimensions inattendues.

Manfred Koob†, le professeur d'architecture dont je fus l'assistant et dont le regard se faisait sentir lors de la modélisation.

Yannis Manoussakis qui m'a offert la possibilité de "mettre des graphes en musique" à Paris et à Orsay.

Arnaud Pêcher, qui m'a intégré au groupe de travail *graphes et optimisation*, et m'a invité à présenter mes travaux pour la première fois en milieu universitaire devant des mathématiciens. Pour ses connaissances dans le domaine très pointu des graphes circulants.

Jean Michel Rocard, pour sa gentillesse et ses éclaircissements concernant Newton.

Les professeurs du laboratoire

Jésus Aguila qui m'a orienté au début de mes recherches.

Jean-Michel Court, mon directeur de recherche côté musique, qui m'a fait confiance, pour son dévouement et la direction innovante qu'il a donnée à mon travail en l'ouvrant au monde atonal.

Alexandra Dardenay, pour ses conseils rédactionnels et la relecture.

François Charles Gaudard, qui m'a donné l'idée de faire une thèse.

Michel Lehmann, pour son assistance et son accueil attentionnés.

Monique Martinez, pour son soutien cordial, administratif, précieux.

Philippe Ortel, pour nos échanges poétiques et amicaux entre image, littérature et mathématiques.

Arnaud Rykner, pour ses encouragements et son soutien administratif sans faille dans les moments difficiles.

Robert Sablayrolles, ami archéologue, pour son soutien, ses encouragements depuis le tout premier jour, et sa relecture.

Enfin, pour l'ambiance pluridisciplinaire et amicale, je remercie les collègues étudiants musicologues, informaticiens, ou mathématiciens, ...

Les mathémusiciens

Carlos Agon, pour ses encouragements amicaux et efficaces, et ses inoubliables : "*papel, papel, papel.*"

Giovanni Albini, pour sa collaboration enthousiaste et amicale.

Emmanuel Amiot, pour ses conseils et encouragements, et ses réponses rapides et précises à mes questions mathématiques parfois insolites.

Moreno Andreatta, pour son accueil à l'Ircam et le temps qu'il m'a consacré lors des séminaires Mamux ; ses conseils précieux qui m'ont orienté, et la confiance qu'il m'a témoignée en m'invitant au palais.

Richard Cohn pour nos échanges et les idées qui m'ont entraîné vers de nouvelles directions.

Jack Douthett, pour son attention et ses célèbres graphes qui m'ont inspiré.

John Mandereau, pour nos échanges *mathémusicamicaux* et sa relecture.

Dmitri Tymoczko, pour le temps qu'il m'a consacré, ses critiques et ses modèles géométriques fascinants.

Enfin, pour leurs conseils, souvent très simples mais toujours pertinents, je remercie aussi : David Clampitt, Xavier Hascher, Julian Hook, Thomas Fiore, Guerino Mazzola et Thomas Noll.

Sommaire

1	INTRODUCTION	17
1.1.	CADRE DE L'ETUDE.....	19
1.1.1.	Finalité	20
1.1.2.	Interprétations.....	22
1.1.3.	Limites du modèle théorique	23
1.1.4.	Symétrie.....	24
1.1.5.	Progressions	25
1.1.6.	Langage.....	26
1.1.7.	Conclusions concernant le cadre.....	26
1.1.8.	Nouveautés et intérêts de cette étude.....	27
1.2.	ASPECTS SPECIFIQUES DISCIPLINAIRES.....	27
1.2.1.	Aspects musicaux.....	27
1.2.2.	Aspects mathématiques	29
1.2.3.	Aspects linguistiques et sémiotiques	32
1.3.	DEFINITIONS PROPRES A CE MEMOIRE.....	34
2	ETUDE MATHEMATIQUE	38
2.1.	MODELISATION PAR LA THEORIE DES GRAPHS	40
2.1.1.	Rappel des conditions	40
2.1.2.	Notions élémentaires nécessaires à la démonstration.....	40
2.1.3.	Traduction des conditions en termes de graphe.....	47
2.1.4.	Décomposition en éléments simples.....	49
2.1.5.	Significations des éléments simples pour la musique.....	52
2.1.6.	Graphes à 12 sommets, produits d'éléments simples	58
2.1.7.	Choix d'un isomorphe : le <i>Graphe Planet</i>	63
2.1.8.	Coloration du graphe.....	64
2.2.	ETUDE DU <i>GRAPHE PLANET</i>	65
2.2.1.	Éléments constitutifs du <i>Graphe Planet</i>	65
2.2.2.	Propriétés du graphe	67
2.2.3.	Traduction des propriétés du graphe en termes musicaux	69
2.2.4.	Calcul du spectre	74
2.2.5.	Etude des espaces propres	80
2.2.6.	Conclusion concernant la projection spectrale du <i>Graphe Planet</i>	91
2.2.7.	Construction du modèle géométrique.....	92
2.3.	ETUDE AUTOUR DES QUATERNIONS.....	95
2.3.1.	La démarche quaternions.....	95
2.3.2.	Construction du modèle par quaternions.....	97
2.3.3.	Distances entre les quaternions.....	100
2.3.4.	Des quaternions aux graphes.....	101
2.3.5.	Conclusions	102

2.4. PROPRIETES DU MODELE GEOMETRIQUE.....	103
2.4.1. Les distances dans le modèle.....	103
2.4.2. Choix possible d'une autre hypersphère.....	106
2.4.3. Arêtes, faces et volumes	107
2.4.4. Rotations et graphe.....	111
2.4.5. Système idéographique	114
2.4.6. Tore et symétries.....	117
2.4.7. Système discret et espace continu.....	118
2.5. GENERALISATIONS DU GRAPHE	120
2.5.1. Cas général circulant à 12 sommets.....	120
2.5.2. Influence des boucles	126
2.5.3. Influence du triton.....	128
2.5.4. Influence de la pondération	128
2.5.5. Conclusion.....	129
2.6. ACCORDS ET HYPERSPHERES	130
2.6.1. Système idéographique à trois dimensions	130
2.6.2. Approche traditionnelle : l'espace dual	131
2.6.3. Accords parfaits sur l'hypersphère	133
2.6.4. Propriétés de l' <i>Hypersphère des Accords</i>	136
2.6.5. L' <i>Hypersphère Généralisée AnySet</i>	143
2.7. CONCLUSIONS.....	149
3 APPLICATIONS MATHEMUSICALES.....	152
3.1. ANALYSE DE CLAVIERS	154
3.1.1. Le clavier du piano	154
3.1.2. Le clavier d'accordéon chromatique	159
3.1.3. Le clavier hexagonal " <i>Tonnetz</i> "	162
3.1.4. Le clavier d'accordéon Wicki-Hayden.....	163
3.1.5. Clavier de Janko	166
3.2. ANALYSE DE RESEAUX DE NOTES	168
3.2.1. Espace circulaire des hauteurs	168
3.2.2. Le Réseau d'Euler	169
3.2.3. Le <i>Tonnetz</i> original de Riemann	170
3.3. ANALYSE DE RESEAUX D'ACCORDS	171
3.3.1. L'espace de Gottfried Weber	171
3.3.2. Weber 1 : les parents directs, la carte de Schoenberg	173
3.3.3. Weber 2 : les parents proches	179
3.3.4. Weber 3 : les parents éloignés	185
3.3.5. Douthett et Steinbach : le <i>Chicken Wire</i>	190
3.3.6. Weitzmann : les schémas de modulations	196
3.4. ANALYSE DE RESEAUX DE GRAPHERS	201
3.4.1. Représentations du graphe de graphe	202
3.4.2. Weber 1 : les parents directs, la carte de Schoenberg	203

3.4.3. Weber 2 : les parents proches.....	205
3.4.4. Weber 3 : les parents éloignés	207
3.4.5. Douthett et Steinbach : le <i>Chicken Wire</i>	209
3.4.6. Weitzmann : les schémas de modulation	211
3.4.7. <i>Graphes de graphes</i> par types d'accords	213
3.5. ANALYSE MUSICALE ET HYPERSPHERES	215
3.5.1. <i>Chicago Blues</i> : trois accords sur un cercle	216
3.5.2. <i>Giant Steps</i> : trois accords sur <i>Planet-4D</i>	217
3.5.3. Beethoven et l' <i>Hypersphère</i> : l'exemple mathémusical de référence.....	218
3.5.4. Albini : le cycle hamiltonien en musique.....	220
3.5.5. Brahms : passages typiques d'accords classiques	221
3.5.6. Purcell : accords non parfaits, retards et hypersphère	222
3.5.7. Chopin : espace circulaire	224
3.5.8. Reprises avec l' <i>Hypersphère Généralisée AnySet</i>	225
3.5.9. Stravinsky	226
3.5.10. Schoenberg.....	228
3.5.11. Webern	229
3.6. CONCLUSIONS MATHÉMUSICALES.....	232
4 CONCLUSIONS.....	236
4.1. CONCLUSIONS	237
4.2. RESULTATS SIGNIFICATIFS	237
4.2.1. Modèles de représentation	237
4.2.2. Analyse d'objets musicaux	238
4.2.3. Analyses musicales	238
4.3. PERSPECTIVES.....	239
4.4. UNE APPLICATION POUR CHACUN	240
5 BIBLIOGRAPHIE	243
6 ANNEXE EXPERIENCES ET APPLICATIONS	251
6.1. CADRE DES EXPERIENCES	253
6.2. EXPERIENCES NON INTERACTIVES.....	253
6.2.1. Improvisations suivant le modèle tournant <i>Planet-3D</i>	254
6.2.2. Production Techno enregistrée.....	256
6.2.3. Musique "classique" et chemin hamiltonien	257
6.2.4. Grille utilisant le modèle <i>Planet</i> comme séries de tonalités.....	257
6.2.5. Compositions respectant moins strictement le modèle.....	259
6.2.6. Test de superposition de chemins	260
6.2.7. Essai avec règles sérielles.....	263
6.3. EXPERIENCES AVEC LE MODELE <i>PLANET</i> INTERACTIF	263
6.3.1. Serious game et apprentissage du Jazz	263

6.3.2. Suivi de parcours avec un pianiste de Jazz	267
6.3.3. Test ludique des limites du pianiste de Jazz	268
6.3.4. Improvisation à l'orgue de cathédrale	269
6.4. PILOTAGE DU LOGICIEL PAR L'INTERPRETE	270
6.4.1. Génération de musique par un novice	270
6.4.2. Génération de Techno en direct	271
6.4.3. Génération d'accompagnement Rap par le chanteur	272
6.4.4. Les autres modulations	274
6.4.5. Musique d'ambiance "électro"	274
6.5. VIDEOS PEDAGOGIQUES SANS COMPOSITION	275
6.5.1. Le cercle chromatique	276
6.5.2. La construction du <i>Tonnetz</i> et du <i>Tore</i>	278
6.5.3. Construction du modèle <i>Planet-4D</i>	278
6.5.4. Construction de l' <i>Hypersphère des Accords</i>	279
6.5.5. Construction de l' <i>Hypersphère Généralisée</i>	280
6.6. EXPERIENCES INTER-ARTS	280
6.6.1. Sculpture en verre	280
6.6.2. Compositions pour <i>l'œuvre sans fin</i>	281
6.6.3. Œuvre vivante interactive "Météorologie"	282
6.7. LE LOGICIEL INTERACTIF <i>PLANET-LOOPS</i>	287
6.7.1. Cadre du développement	287
6.7.2. Les modes de déplacement	287
6.7.3. Contrôle du logiciel	288
6.7.4. L'environnement graphique	288
6.7.5. Création des échantillons	288
6.7.6. Développements envisagés	290
7 ANNEXE 2 MULTIMEDIA	292
8 INDEX	299

Table des Illustrations

Figure 1-1 : Le cercle chromatique de Newton re-colorisé	19
Figure 1-2 : Le <i>Tonnetz</i> original d'Hugo Riemann	21
Figure 1-3 : Des conditions de départ à la visualisation	30
Figure 2-1 : Un exemple de graphes cycle et de graphe complet	42
Figure 2-2 : Deux graphes isomorphes	43
Figure 2-3 : Une matrice symétrique	44
Figure 2-4 : Une matrice circulante	45
Figure 2-5 : Une matrice circulante et symétrique	48
Figure 2-6 : Les graphes C_{12} et K_{12}	50
Figure 2-7 : Les graphes C_2 et K_2	51
Figure 2-8 : Le graphe triangle	51
Figure 2-9 : Un exemple de calcul cyclique familial dans \mathbb{Z}_{12}	53
Figure 2-10 : Les graphes à 2 sommets passant par <i>do</i>	54
Figure 2-11 : Les six tritons correspondant à la division de l'octave par 2	54
Figure 2-12 : Les graphes à 3 et 4 sommets passant par <i>do</i>	55
Figure 2-13 : Les quatre groupes de tierces majeures	55
Figure 2-14 : Les trois groupes de tierces mineures	55
Figure 2-15 : Les graphes à 6 sommets passant par <i>do</i>	56
Figure 2-16 : Les deux gammes par ton	56
Figure 2-17 : Une illustration graphique du produit cartésien de deux graphes	58
Figure 2-18 : L'apparence choisie pour le Graphe Planet	64
Figure 2-19 : La coloration par nombres complexes utilisée	65
Figure 2-20 : Les deux générations de \mathbb{Z}_{12}	67
Figure 2-21 : Les voisins communs des sommets adjacents	68
Figure 2-22 : Les voisins communs des sommets non-adjacents	69
Figure 2-23 : Un chemin hamiltonien dans le Graphe Planet	71
Figure 2-24 : Un cycle eulérien dans le Graphe Planet	72
Figure 2-25 : Projection du Graphe Planet dans E_2	81
Figure 2-26 : Projection du Graphe Planet dans E_0	82
Figure 2-27 : Les gammes à dièses et les gammes à bémols dans E_0	83
Figure 2-28 : Projection du Graphe Planet dans E_3	84
Figure 2-29 : Projection des accords diminués dans E_3	84
Figure 2-30 : Projection du Graphe Planet dans E_4	85
Figure 2-31 : Projection des accords augmentés dans E_4	86
Figure 2-32 : Projection 3D du Graphe Planet dans E_1 extraite de l'animation	87
Figure 2-33 : Visualisation de E_1 par scindement de l'espace 4D	88
Figure 2-34 : Image de synthèse des deux "côtés" de l'hypersphère	88
Figure 2-35 : Cheminement utilisé avec les quaternions	97
Figure 2-36 : Les distances possibles dans le modèle Planet-4D	101
Figure 2-37 : Les points voisins dans un espace 3D	101
Figure 2-38 : Le graphe résultant de l'étude par quaternions	102
Figure 2-39 : Les relations entre les méthodes utilisées	103
Figure 2-40 : Les deux types d'éléments à une dimension dans Planet-4D	108
Figure 2-41 : Les trois types d'éléments à deux dimensions dans Planet-4D	109
Figure 2-42 : La troisième échelle périodique de Bartók	109
Figure 2-43 : La deuxième échelle périodique de Bartók	110
Figure 2-44 : Les deux types d'éléments à trois dimensions dans Planet-4D	110

Figure 2-45 : Les deux axes de rotation du modèle <i>Planet-4D</i>	112
Figure 2-46 : Une position de départ en <i>do</i> dans <i>Planet-4D</i>	113
Figure 2-47 : Deux positions possibles après rotation depuis <i>do</i>	113
Figure 2-48 : Les cercles chromatiques et cercle des quartes sous-jacents dans <i>Planet-4D</i>	114
Figure 2-49 : Déplacements et changements d'une dimension idéographique	117
Figure 2-50 : Les symétries du <i>Tore des tierces</i> de Guerino Mazzola	117
Figure 2-51 : Deux grilles équivalentes pour les graphes avec ou sans boucles	127
Figure 2-52 : Deux partitions équivalentes pour les graphes avec ou sans boucles	127
Figure 2-53 : Un exemple de <i>Tonnetz</i> pondéré	129
Figure 2-54 : Les trois dimensions idéographiques pour les accords parfaits	130
Figure 2-55 : Le réseau hexagonal de Julian Hook	132
Figure 2-56 : Le placement des accords parfaits dans un réseau à deux dimensions	133
Figure 2-57 : Le centre du triangle à l'intérieur d'une sphère	134
Figure 2-58 : Les positions angulaires des accords parfaits sur l' <i>Hypersphère</i> en vue 2D	135
Figure 2-59 : Deux coupes planes perpendiculaires de l' <i>Hypersphère</i> contenant la note <i>do</i> (0)	135
Figure 2-60 : Représentation des distances euclidiennes depuis <i>do majeur</i>	139
Figure 2-61 : Représentation des distances euclidiennes depuis <i>do mineur</i>	139
Figure 2-62 : Les rotations θ et α présentées sur un plan	140
Figure 2-63 : Proximité des accords depuis <i>do majeur</i> et <i>do mineur</i> en distance euclidienne	142
Figure 2-64 : Proximité des accords depuis <i>do majeur</i> et <i>do mineur</i> en distance Manhattan	142
Figure 2-65 : Les positions angulaires de quelques accords remarquables	145
Figure 2-66 : Un contournement de singularités	147
Figure 2-67 : La position du centre de l'accord {1,5}	148
Figure 2-68 : L' <i>Hypersphère Généralisée AnySet</i> en mode atonal	149
Figure 3-1 : Le clavier du piano	154
Figure 3-2 : Le graphe et la matrice associés au clavier du piano	155
Figure 3-3 : Projection du graphe piano dans l'espace E_2	156
Figure 3-4 : Projection du graphe piano dans l'espace E_9	157
Figure 3-5 : Projection du graphe piano dans l'espace combiné $\{E_0, E_1\}$	158
Figure 3-6 : Projections du graphe piano dans d'autres combinaisons d'espaces	158
Figure 3-7 : Les dispositions de différents claviers d'accordéon	159
Figure 3-8 : Le clavier d'accordéon chromatique	159
Figure 3-9 : Le graphe et la matrice associés au clavier de l'accordéon chromatique	160
Figure 3-10 : Projection du clavier chromatique dans E_3 à cinq dimensions	161
Figure 3-11 : Le clavier dit "Hexagonal"	162
Figure 3-12 : Le graphe et la matrice associés au clavier hexagonal <i>Tonnetz</i>	162
Figure 3-13 : Projection du <i>Tonnetz</i> dans le sous-espace E_2 à trois dimensions	163
Figure 3-14 : Le clavier d'accordéon de Wicki-Hayden	164
Figure 3-15 : Le graphe et la matrice associés au clavier Wicki-Hayden	164
Figure 3-16 : Différentes vues de la projection du clavier Wicki-Hayden	165
Figure 3-17 : Un piano équipé du clavier de Janko	166
Figure 3-18 : L'arrangement des touches selon le clavier de Janko	166
Figure 3-19 : Le graphe et la matrice associés au clavier de Janko	167
Figure 3-20 : Le <i>Speculum Musicum</i> d'Euler	169
Figure 3-21 : Le graphe et la matrice associés au réseau d'Euler	169
Figure 3-22 : Une représentation du <i>Tonnetz</i> et de son espace dual avec le système <i>Planet</i>	170
Figure 3-23 : Les <i>parentés entre tonalités</i> de Weber	172
Figure 3-24 : Les accords parents directs chez Weber	173
Figure 3-25 : La carte des régions de Schoenberg	174

Figure 3-26 : Le graphe de Weber degré 1	175
Figure 3-27 : Projections du graphe Weber 1 dans E_0 et E_4	176
Figure 3-28 : Projections du graphe Weber 1 dans E_6 et E_9	177
Figure 3-29 : Projections du graphe Weber 1 dans E_1 et E_2	178
Figure 3-30 : Projections du graphe Weber 1 dans E_3 et E_8	178
Figure 3-31 : Projection du graphe Weber 1 dans E_7	179
Figure 3-32 : Les parents directs et les parents proches chez Weber	180
Figure 3-33 : Le graphe de Weber degré 2	180
Figure 3-34 : Projections du graphe Weber 2 dans E_3 et E_4	182
Figure 3-35 : Projections du graphe Weber 2 dans E_0 et E_{10}	182
Figure 3-36 : Projections du graphe Weber 2 dans E_0 et E_8	183
Figure 3-37 : Projections du graphe Weber 2 dans E_1 , E_2 et E_9	184
Figure 3-38 : Projection du graphe Weber 2 dans E_5	184
Figure 3-39 : Les accords parents éloignés chez Weber	185
Figure 3-40 : Le graphe de Weber degré 3	186
Figure 3-41 : Projections du graphe Weber 3 dans E_2 et E_3 , <i>do</i> seulement	187
Figure 3-42 : Projections du graphe Weber 3 dans E_8 et E_{11} , <i>do</i> seulement	188
Figure 3-43 : Projections du graphe Weber 3 dans E_0, E_1 , E_4, E_5, E_6, E_7, E_9 et E_{10} , <i>do</i> seulement	189
Figure 3-44 : Le <i>Chicken Wire</i> de Jack Douthett et Peter Steinbach	190
Figure 3-45 : Le <i>Chicken Wire</i> sous forme de graphe à 24 sommets dans le système <i>Planet</i>	190
Figure 3-46 : La matrice du graphe associé au <i>Chicken Wire</i>	191
Figure 3-47 : Projection du <i>Chicken Wire</i> dans E_0	192
Figure 3-48 : Projections du <i>Chicken Wire</i> dans E_2 et E_9	192
Figure 3-49 : Projections du <i>Chicken Wire</i> dans E_5 et E_6	192
Figure 3-50 : Projections du <i>Chicken Wire</i> dans E_1 et E_{10}	194
Figure 3-51 : Projections du <i>Chicken Wire</i> dans E_3 et E_8	194
Figure 3-52 : Projection du <i>Chicken Wire</i> dans E_4	195
Figure 3-53 : Projection du <i>Chicken Wire</i> dans E_7	195
Figure 3-54 : Les "Douze sons de notre système" selon Weitzmann	196
Figure 3-55 : Les régions hexatoniques et le <i>graphe de Weitzmann</i> définis par Richard Cohn	197
Figure 3-56 : Le <i>Cube Dance</i> de Douthett et Steinbach	198
Figure 3-57 : Le schéma de modulations de Weitzmann	199
Figure 3-58 : Le graphe inspiré des modulations de Weitzmann	200
Figure 3-59 : La matrice du graphe associé à l'espace des modulations de Weitzmann	201
Figure 3-60 : Le symbole employé pour le nœud 0 dans un <i>graphe de graphes</i>	202
Figure 3-61 : Construction d'un <i>graphe de graphes</i>	202
Figure 3-62 : Réorganisation de la matrice du graphe Weber 1	203
Figure 3-63 : Le <i>graphe de graphes</i> et sa matrice associée pour Weber 1	204
Figure 3-64 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> Weber 1 dans E_1 et E_3	205
Figure 3-65 : Projection 6D du <i>graphe de graphes</i> Weber 1 dans E_2	205
Figure 3-66 : Le <i>graphe de graphes</i> et sa matrice associée pour Weber 2	206
Figure 3-67 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> Weber 2 dans E_1 et E_5	206
Figure 3-68 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> Weber 2 dans E_2 , E_3 et E_4	207
Figure 3-69 : Le <i>graphe de graphes</i> et sa matrice associée pour Weber 3	207
Figure 3-70 : Projection 3D du <i>graphe de graphes</i> Weber 3 dans E_2	208
Figure 3-71 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> Weber 3 dans E_1 et E_5	209
Figure 3-72 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> Weber 3 dans E_3 et E_4	209
Figure 3-73 : Le <i>graphe de graphes</i> et la matrice associée au <i>Chicken Wire</i>	210
Figure 3-74 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> du <i>Chicken Wire</i> dans E_1 , E_2 , E_3 , E_4 et E_5	210

Figure 3-75 : Le <i>graphe de graphes</i> et la matrice associée aux modulations de Weitzmann	211
Figure 3-76 : Projections 2D du <i>graphe de graphes</i> des modulations de Weitzmann dans E_1 et E_4 ..	211
Figure 3-77 : Projection 3D du <i>graphe de graphes</i> des modulations de Weitzmann dans E_2	212
Figure 3-78 : Projection 4D du <i>graphe de graphes</i> des modulations de Weitzmann dans E_3	212
Figure 3-79 : L'espace circulaire du Blues	216
Figure 3-80 : Les trois séquences de <i>Giant Steps</i>	217
Figure 3-81 : La progression d'accords remarquable, dans la 9^{ème}	218
Figure 3-82 : Un extrait de <i>Beethoven et l'Hypersphère</i>	219
Figure 3-83 : Un chemin hamiltonien sur l' <i>Hypersphère des Accords</i>	220
Figure 3-84 : Une utilisation de l' <i>Hypersphère</i> avec Brahms	221
Figure 3-85 : Un accord non parfait sur l'hypersphère	223
Figure 3-86 : Un extrait de Chopin avec l' <i>Hypersphère</i> et l'espace de Tymoczko	224
Figure 3-87 : Un accord symétrique chez Stravinsky	227
Figure 3-88 : Une suite répétitive chez Stravinsky	227
Figure 3-89 : La symétrisation d'un accord chez Schoenberg	228
Figure 3-90 : Un centre de symétrie sur une note non jouée chez Schoenberg	229
Figure 3-91 : Un enchaînement selon une rotation 4D chez Schoenberg	229
Figure 3-92 : Deux accords symétriques par rapport au point 2 chez Webern	230
Figure 3-93 : La note <i>ré</i> et un accord symétrique sans <i>ré</i> chez Webern	231
Figure 3-94 : Une symétrie par rapport à un point sans note chez Webern	231
Figure 6-1 : La grille de <i>Walk</i>	254
Figure 6-2 : Le modèle 3D tournant et le ruban 2D	255
Figure 6-3 : La grille de <i>NewPlanet</i>	258
Figure 6-4 : La grille et la progression harmonique de <i>Ellipsong</i>	260
Figure 6-5 : La partition et un extrait vidéo de <i>Double-jeu</i>	261
Figure 6-6 : Une image extraite de <i>Ombres Chinoises</i>	262
Figure 6-7 : Une séance d'entraînement Jazz avec Planet-Loops	267
Figure 6-8 : La répartition linéaire des couleurs	276
Figure 6-9 : Une répartition humanisée des couleurs	277
Figure 6-10 : La sculpture en verre et en trois dimensions du modèle <i>Planet-4D</i>	281
Figure 6-11 : Les directions d'évolution de la musique dans Météo	283
Figure 6-12 : Un exemple d'évolution aléatoire de l'avancement	285
Figure 6-13 : Un exemple de chemin suivi et de chemin souhaité	286
Figure 6-14 : La différence entre transposition et modulation sous forme de grille	289
Figure 6-15 : La différence entre transposition et modulation sous forme de partition	289

Index des tableaux

Tableau 1-1 : Un graphe et sa matrice d'adjacence	30
Tableau 2-1 : Les éléments simples retenus pour la construction du graphe	52
Tableau 2-2 : Les graphes élémentaires retenus	57
Tableau 2-3 : Les décompositions possibles de l'espace des hauteurs.	60
Tableau 2-4 : Exemples de graphes construits avec $G_2 \square G_6$	61
Tableau 2-5 : Exemples de graphes construits avec $G_3 \square G_4$	62
Tableau 2-6 : Construction et étiquetage du graphe $C_3 \square C_4$	63
Tableau 2-7 : Signification des graphes élémentaires constitutifs	66
Tableau 2-8 : Correspondance musicale des propriétés générales d'un graphe	73
Tableau 2-9 : Décomposition spectrale initiale du <i>Graphe Planet</i>	78
Tableau 2-10 : Décomposition spectrale finale du <i>Graphe Planet</i>	80
Tableau 2-11 : Matrice des distances dans l'espace E_1	90
Tableau 2-12 : Distances physiques et intervalliques dans E_1	91
Tableau 2-13 : Coordonnées et symboles pour le modèle géométrique <i>Planet</i>	94
Tableau 2-14 : Exemple de notation pour les réels, les complexes et les quaternions	95
Tableau 2-15 : Matrice d/es distances dans le modèle <i>Planet</i>	105
Tableau 2-16 : Distances physiques et intervalles dans le modèle <i>Planet-4D</i>	105
Tableau 2-17 : Matrice des distances dans le modèle <i>Planet-S3</i>	107
Tableau 2-18 : Grandeurs physiques et mesures dans le modèle <i>Planet-4D</i>	111
Tableau 2-19 : Effet des rotations spatiales simples	112
Tableau 2-20 : Effet des rotations spatiales combinées	114
Tableau 2-21 : Interprétations contextuelles du système idéographique	116
Tableau 2-22 : Les symétries du tore dans le modèle <i>Planet-4D</i>	118
Tableau 2-23 : Le système <i>Planet</i> et l'espace de Tymoczko	119
Tableau 2-24 : Propriétés d'un graphe associé tempérament égal	120
Tableau 2-25 : Liste exhaustive des formes géométriques possibles	124
Tableau 2-26 : Liste exhaustive des sous-espaces propres possibles	125
Tableau 2-27 : Liste exhaustive des éléments géométriques possibles	126
Tableau 2-28 : Effet des rotations spatiales combinées	137
Tableau 2-29 : Distances carrées entre accords de types différents	138
Tableau 2-30 : Distances angulaires sur l' <i>Hypersphère des Accords</i>	141
Tableau 2-31 : Positions de quelques accords remarquables	145
Tableau 3-1 : Notation utilisée pour les accords parfaits	154
Tableau 3-2 : Ensemble des projections spectrales du graphe associé au clavier du piano	156
Tableau 3-3 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe de Weber 1	177
Tableau 3-4 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe de Weber 2	183
Tableau 3-5 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe de Weber 3	188
Tableau 3-6 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe <i>Chicken Wire</i>	193
Tableau 3-7 : Régions de Cohn, étoiles et distances dans l'hypersphère	198
Tableau 3-8 : <i>Graphes de graphes</i> par types d'accords	214
Tableau 6-1 : Table des distances pour <i>Double Jeu</i>	261
Tableau 6-2 : Positions à atteindre dans <i>Météo</i>	285

Thèse en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Université Toulouse II-Le Mirail - Laboratoire LLA- Créatis

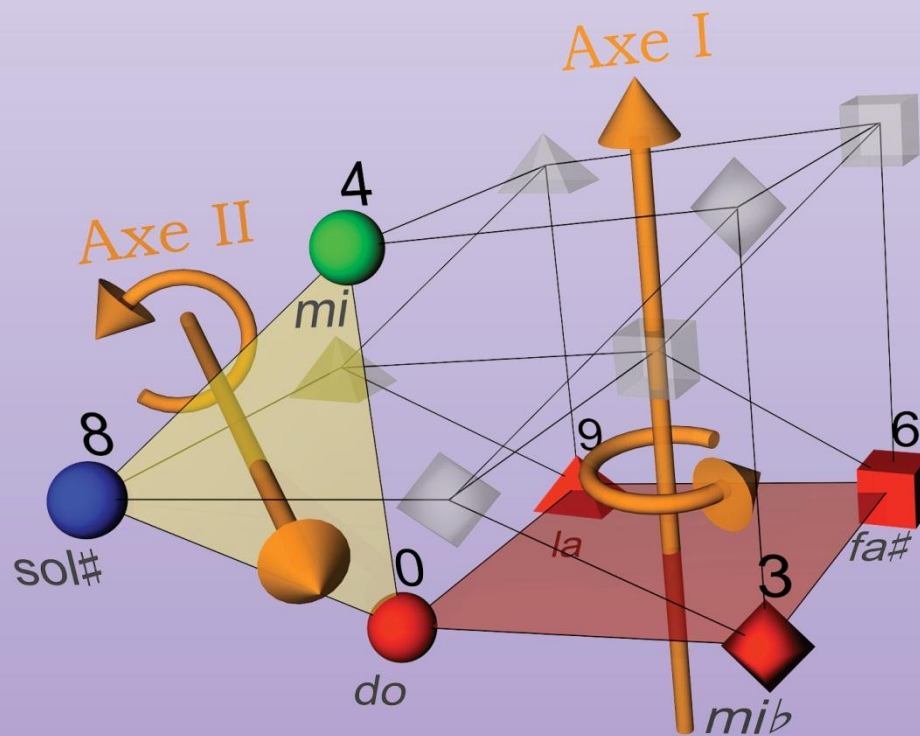
• Spécialité Musique •

Présentée et soutenue publiquement par

Gilles BAROIN

Le 5 décembre 2011

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

1.1. CADRE DE L'ETUDE

Sir Isaac Newton fut le premier à étudier et expliquer la décomposition de la lumière. Il avait observé que, lorsqu'un rayon de soleil pénètre un prisme en verre selon un certain angle, une partie du rayon le traverse et se décompose en bandes colorées. Il pensait que la lumière était faite de corpuscules de différentes couleurs, et que chaque couleur traversait le prisme à sa propre vitesse. La lumière rouge étant la plus rapide (la violette la plus lente), elle était par conséquent la moins déviée, ce qui créait l'effet spectaculaire de spectre de couleurs. Il choisit sept couleurs, rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo et violet, et y associa les sept notes de musique de la gamme.

A cette époque, il n'était pas encore question de gamme chromatique, ou de théorie moderne plaçant douze notes le long d'un cercle ou dans un espace. La gamme conventionnelle contient sept notes (*do, ré, mi, fa, sol, la, si*) que l'on peut transcrire avec des lettres (A,B,C,D,E,F,G). La lettre A correspondant à la note *La*. Newton a, de plus, disposé les sept notes de la gamme (dite diatonique) autour de son illustration, en associant ainsi une couleur à une note, et ordonné les sept notes de façon géométrique : le long d'un cercle.

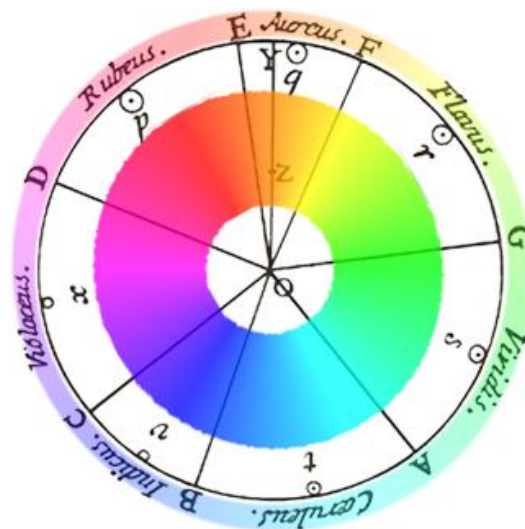


Figure 1-1 : Le cercle chromatique de Newton re-colorisé

Depuis, la physique moderne nous a apporté d'autres explications concernant la diffraction de la lumière, mais la décomposition de Newton fut pertinente et originale et il fut le premier à associer notes, couleurs, et géométrie. La figure 1-1 ci-dessus propose une colorisation moderne du cercle original de Newton³.

³ Le cercle noir et blanc ainsi que les annotations d'époques sont présents sur ce dessin. La couleur rose est artificiellement créée en mélangeant les deux teintes extrêmes : le rouge et le violet. La version animée est disponible sur le support multimédia accompagnant (Voir Clip F 1 : Circular Representations, p.293.)

1.1.1. Finalité

La raison de cette étude est la recherche d'un nouveau modèle géométrique symétrique représentant les douze notes⁴ de musique dans un espace propre, ce modèle pouvant servir de base à un système musical.

En complément du placement spatial de ces notes, nous leur attribuerons des caractéristiques idéographiques permettant de les différencier. Les Notes, unités discrètes du langage musical, seront des morphèmes⁵, les plus petits éléments constituant du langage, et chaque note sera représentée par un idéogramme⁶ différent. Nous obtiendrons alors un modèle géométrique où chaque note sera caractérisée par un symbole et une position spatiale. A partir d'un cadre et de conditions que nous préciserons au chapitre 1.1.7, nous calculerons, à l'aide d'outils mathématiques modernes, le modèle géométrique répondant à nos critères.

Nous visualiserons ensuite en images de synthèse, à l'aide de films 3D, l'espace des hauteurs ainsi calculé, qui contiendra les idéogrammes représentant les notes. Nous utiliserons les douze degrés chromatiques de la *Set Theory*⁷, appelés aussi classes de hauteur (*Pitch Classes*)⁸, qui sont aussi les douze notes d'un piano moderne. Les classes de hauteurs permettent de représenter les hauteurs de la gamme chromatique du tempérament égal⁹ via deux simplifications : utilisation de l'enharmonie et réduction à l'octave. L'enharmonie s'exprime de la façon suivante : la même touche du piano produit la même note, appelée *mi bémol* ou *ré dièse* selon le contexte tonal (les violons, eux, jouent la différence). La réduction à l'octave exprime l'équivalence entre les notes de même nom : un *do* grave sera équivalent à un *do* aigu. Il n'existera donc que douze classes distinctes : de *do* jusqu'à *si*, sans distinction entre, par exemple, *ré[#]* et *mi^b*, ni entre un *do* grave ou un *do* aigu.

Ce modèle représentera donc le seul paramètre hauteur de son et permettra de créer un espace géométrique dans lequel les hauteurs de notes seront des points. Ce type de représentation s'appelle un espace de hauteurs (*Pitch Space* ou encore *Pitch Class Space*)¹⁰.

Il existe en effet de nombreux modèles géométriques représentant ces douze notes. Nous en étudierons quelques-uns au chapitre 3.2. Il n'y a pas, actuellement, de modèle répondant à la fois aux conditions de symétrie que nous spécifierons plus bas et permettant une correspondance parfaite entre la distance spatiale entre deux points de l'espace et le

⁴ Dans cette étude, les notes sont considérées en tant que classes de hauteur, voir note⁸.

⁵ Morphème : la plus petite unité porteuse de sens qu'il soit possible d'isoler dans un énoncé. Ex : dans "Chantez", il y a deux morphèmes : "Chant-" et "-ez".

⁶ Symbole graphique représentant un mot ou une idée.

⁷ Méthodologie d'analyse musicale imaginée par Allen Forte (Forte, 1973) basée, la Set Theory n'est pas particulièrement fondée sur la théorie des ensembles, mais plutôt sur l'arithmétique modulaire, on travaille sur les hauteurs de notes modulo 12 (ou plus généralement modulo n). Pour un panorama plus complet, voir les actes du colloque "Around Set Theory" (Andreatta, Bardez, & Rahn, 2008)

⁸ Classe de Hauteur (Pitch Class) : collection de notes égales, à une octave près.

⁹ Tempérament égal : le rapport en fréquence entre deux notes consécutives est constant : cas du piano ou des synthétiseurs.

¹⁰ Espace de hauteurs (Pitch Class Space) : espace contenant les classes de hauteurs.

rapport de fréquence de ces deux mêmes notes. Comme l'échelle des fréquences est logarithmique et que nous la percevons linéairement, nous utilisons des distances qui correspondent aux rapports de fréquences entre les notes. Voir la note ⁸⁷, p. 104.

Nous chercherons à représenter les douze notes dans l'espace de la façon la plus symétrique et la plus compacte possible afin d'apporter une alternative aux modèles existants qui n'ont pas de vraie équivalence entre l'espace des fréquences et celui des points géométriques. Nous avons aussi l'intention additionnelle de créer un objet mathématique esthétique à douze points répartis symétriquement, qui ne soit ni un cercle ni une sphère habituelle.

Extension de la méthode aux réseaux existants :

Nous étendrons ensuite notre approche mathématique, basée sur la théorie des graphes, et infographique, aux autres systèmes de représentations existants : les *Tonnetze*, réseaux représentant selon le contexte, des relations entre sons, notes, tonalités ou accords..

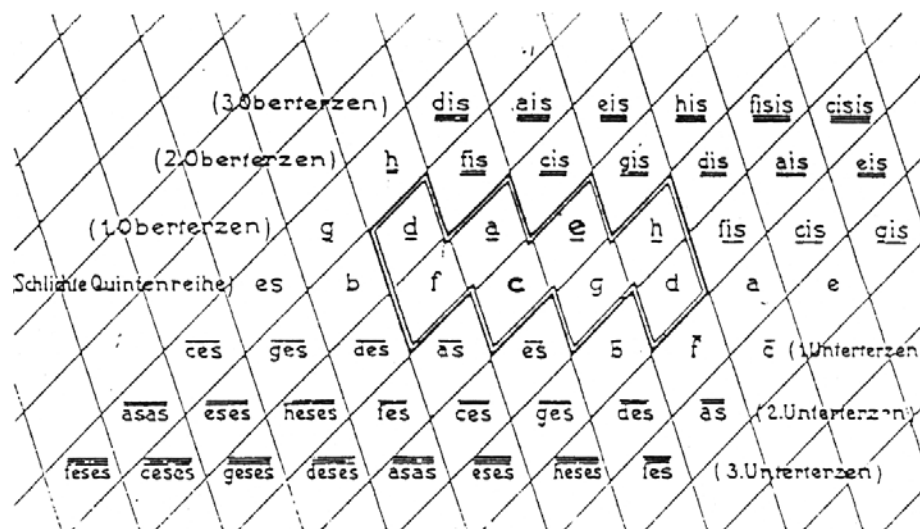


Figure 1-2 : Le *Tonnetz* original d'Hugo Riemann

Un *Tonnetz*¹¹, ou réseau de notes, est une représentation imaginée par le mathématicien Leonard Euler en 1739 et mise en pratique par musicologue Hugo Riemann en 1914. Sa représentation originale¹² est présentée figure 1-2. Dans un *Tonnetz*, certaines notes sont reliées entre elles ou placées dans les cases adjacentes d'une grille sur un dessin plan. Dans un cadre tonal, tel qu'il fut imaginé à l'origine, le *Tonnetz* se présentait comme un réseau plan. Depuis, nombre de chercheurs ont étendu ce modèle, et proposé d'autres représentations inspirées de celle d'Hugo Riemann. Ce sont des représentations planes ou tridimensionnelles de ces réseaux, composées de cercles, plans, hexagones, cubes ou tores. Dans le cadre que nous utilisons pour la recherche de notre modèle, le *Tonnetz* peut se représenter sous la forme d'un Tore 3D¹³.

¹¹ Tonnetz (Tonal Net) ou réseau tonal représentant des relations entre tons (voir l'animation Clip F 2 : Planar *Tonnetze*, p.293.)

¹² Voir (Riemann, 1914).

¹³ Voir le Tore de Guerino Mazzola représenté p. 107, Figure 2-50, ainsi que la vidéo Clip F 3 : Torus and Traditional *Tonnetze*, p.293.

A notre connaissance, les outils mathématiques de la théorie des graphes utilisés dans cette thèse n'ont pas été appliqués à ces réseaux. Nous chercherons aussi à visualiser et recalculer ces derniers en appliquant notre méthode mathématique et infographique.

1.1.2. Interprétations

Le même modèle sera interprété de deux façons complémentaires, statique et dynamique.

L'interprétation statique est une représentation des classes de hauteurs dans un espace géométrique, nous y remarquerons les propriétés des symétries calculées ainsi que les relations entre notes grâce à notre système de formes et couleurs.

Lors de l'interprétation dynamique, nous nous déplacerons virtuellement d'un point à un autre du modèle, en générant en chaque place une note ou un accord (au sens large du terme). Une musique pourrait être générée et évoluer en fonction des déplacements au sein du système.

1.1.2.1. Interprétation statique : modèle discret

Concernant la spatialisation des notes pour l'interprétation statique, il s'agit de visualiser les douze notes selon un nouveau modèle répondant aux conditions de départ que nous préciserons au chapitre 1.1.7. Les notes seront simplement des points discrets d'un espace géométrique, chacune sera représentée sous la forme d'un signe différent, lui conférant ainsi une propriété graphique la distinguant des autres. En effet, le modèle étant destiné à être visualisé sous des angles différents, il est opportun d'utiliser pour chaque note un idéogramme différent. Ces symboles ont été choisis de façon arbitraire et sont associés à la décomposition de l'espace des douze notes que nous montrerons. Ceci permettra d'accentuer graphiquement les relations entre notes que nous aurons établies. Une représentation par système de formes et couleurs aura de plus l'avantage d'aider le lecteur et l'auditeur non familiers des représentations et des noms usuels des notes, à se repérer. Le système de formes et de couleurs, qui découlera du calcul mathématique, sera présenté au cours de cette étude.

L'espace ainsi créé pourra être considéré comme une sculpture géométrique, voire un objet esthétique calculé à partir de conditions définies. L'objet ainsi calculé peut être interprété comme une épure représentant de façon spatiale les relations fondamentales entre les notes ou les accords du système à tempérament égal.

1.1.2.2. Interprétation dynamique : parcours de modulations

En considérant les points comme des notes ou des accords de base, passer d'un point à un autre pourra être considéré comme une

modulation¹⁴. En changeant de position nous changerons d'accord : l'harmonie (perçue par l'oreille comme couleur harmonique ou ambiance harmonique) changera et donnera ainsi une impression de changement de couleur auditive à l'auditeur : c'est une modulation. Les changements d'accords, ou cadences¹⁵, utilisés ici sont bien entendu connus des musiciens.

1.1.2.3. Timbre, durée, intensité et hauteur de son

Comme nous étudions des relations entre classes de hauteurs et travaillons sur des espaces de hauteurs, nous ne considérons que le paramètre hauteur de la note. Il convient toutefois de citer les autres paramètres fondamentaux d'une note.

Le timbre : parfois appelé "couleur du son" (En allemand : *Klangfarbe*) est une caractéristique fondamentale d'une note qui permet d'identifier la source productrice du son : pour la même note jouée, c'est-à-dire la même fréquence fondamentale¹⁶ nonobstant les harmoniques¹⁷, les timbres de voix, flûte, ou piano nous permettront de reconnaître l'instrument jouant. Un son "pur", de forme sinusoïdale, sonne comme le *la* du téléphone¹⁸ : ce sont les harmoniques qui caractérisent le timbre. Nombre de musiques font appel au timbre comme élément principal par rapport à la hauteur de son : musique électroacoustique de Stockhausen, Pousseur,...

La durée est la longueur de la note exprimée au cours du temps, elle dépend de la valeur de cette note et du tempo. C'est la durée pendant laquelle le son sera émis.

L'intensité d'un son correspond à la pression acoustique produite par celui-ci, on l'exprime en physique en décibels (dB) et elle se traduit en puissance électrique. Pour parler de l'intensité, les expressions populaires suivantes sont aussi utilisées : souffler plus fort, jouer plus ou moins fort, monter ou baisser le volume¹⁹.

1.1.3. Limites du modèle théorique

Comme nous nous situons dans le cadre de la *Set Theory*, deux notes distantes d'une octave (rapport de fréquence de deux) seront caractérisées par le même idéogramme et représentées par le même point. C'est justement le fait de considérer tous les *do* de façon identique qui pose

¹⁴ Voir une transformation au sens donné par (Lewin, 1987).

¹⁵ Cadence : enchaînement d'accords ayant une fonction particulière.

¹⁶ A considérer aussi dans le sens "fréquence fondamentale" dans une transformation de Fourier.

¹⁷ Fréquences multiples de la fondamentale : notion équivalente d'harmonique en analyse du signal.

¹⁸ La "tonalité" du téléphone fixe entendue avant de composer un numéro est un La₃ à 440 Hz.

¹⁹ Le terme *bémo*, n'a rien à voir avec l'intensité du son : ajouter un *bémo* à une note c'est en baisser la hauteur d'un demi-ton. Cette expression est hélas parfois utilisée à tort au grand dam des musiciens. Afin d'inciter un locuteur à parler moins fort, préférons le terme musical approprié : "piano, piano" en général accompagné du geste de la main adéquat.

problème et montre les limites d'un modèle basé sur les classes de hauteurs dans la pratique.

En effet même si tous les *do* sont représentés par le même symbole, qu'il soit aigu ou grave, joué par tel ou tel instrument, qu'il y ait un ou plusieurs *do*, la représentation sera identique. C'est ici que se trouve la limite d'une représentation de l'espace des hauteurs et il importe de préciser ce contexte. Ce fait n'est pas propre à notre modèle, il est inhérent au concept de classe de hauteurs.

1.1.4. Symétrie

Leon Lederman²⁰ considère que le théorème de Noether est "*certainement l'un des théorèmes mathématiques les plus importants jamais prouvés, ..., à égalité avec le théorème de Pythagore*"²¹. Le théorème de Noether précise que "à chaque symétrie locale, correspond une loi de conservation"(Noether,1918). Les applications en physique sont connues. Par exemple la symétrie de translation dans le temps correspond à la conservation de l'énergie, la symétrie de rotation dans l'espace correspond à la conservation du moment angulaire.

En appliquant les principes de Noether à la musique, nous proposons les correspondances suivantes.

- A l'invariance par rapport à la transposition²² correspond la conservation de la ligne mélodique. En effet : transposer une mélodie ne change pas sa forme.
- A la symétrie géométrique du modèle correspond la conservation des relations hiérarchiques entre accords. Par exemple le *Tonnetz* respecte cette invariance, mais il est infini.

Au cours de l'étude, seuls les modèles symétriques seront sélectionnés. Le choix de la symétrie est un pôle esthétique personnel, il correspond d'une part à un goût pour la philosophie Pythagoricienne où la sphère était l'objet de perfection par excellence²³, ainsi que pour la géométrie en hyperspace ou la symétrie est un point central chez Coxeter²⁴. Mon intérêt pour la symétrie correspond d'autre part à un goût pour un type de musique en système clos que l'on retrouve entre autres chez Scriabine, Webern et Messiaen. Enfin la symétrie appliquée aux progressions harmoniques lors de la composition musicale procure des sensations particulières : "avancer sans progresser", par analogie aux dessins de Escher (Escher, 1984).

²⁰ Dans "Symmetry and the beautiful universe" (Lederman & Hill, 2004).

²¹ "certainly one of the most important mathematical theorems ever proved in guiding the development of modern physics, possibly on a par with the Pythagorean theorem".

²² Transposition s'entend ici ainsi que dans le reste de cette étude au sens musical du terme : jouer la même mélodie plus grave ou plus aigu, ce qui se traduit par permutation circulaire dans Z12. En mathématique, transposition signifie généralement permutation d'éléments.

²³ Platon pensait que la terre était une sphère parfaite au centre d'un Univers parfait constitué de sphères. "Voilà pourquoi et pour quelle raison le dieu a construit avec tous les tous ce tout unique, parfait et inaccessible" Platon, Le Timée (Schelling & Michalewski, 2005).

²⁴ "The unifying thread that runs through the whole work is the idea of a group of transformations or, in a single word, symmetry" (Coxeter, 1989).

La symétrie permet de donner une position équivalente à chaque élément.

Elle se manifestera ici par une invariance par rapport à la transposition.

La transposition ne devra pas changer la forme du modèle : que le chemin commence par *do* ou *la*, la perception auditive ne changera qu'en termes de fréquence. Bien qu'une mélodie transposée, c'est-à-dire jouée en commençant par une note différente plus haute ou plus basse, soit composée de fréquences différentes par rapport à l'originale, l'oreille humaine saura la reconnaître. Par exemple chacun reconnaîtra le même air, chanté par une femme (plus aigu) ou par un homme (plus grave).

Distances géométrique et intervallique

En fait, comme la transposition s'entend et se perçoit de manière linéaire, un demi-ton transposé est toujours perçu par l'oreille de la même façon ; l'écart en fréquence, lui, est logarithmique : une corde de guitare pincée en son milieu sonnera une octave plus aiguë que la même corde à vide, la fréquence du son produit sera multipliée par deux. La même corde pincée au quart de sa longueur sonnera deux octaves plus aiguës que la corde à vide.

Transposer une mélodie d'une octave se comprend (linéairement) en ajoutant douze demi-tons à la mélodie de départ, alors qu'acoustiquement chaque fréquence de cette mélodie est multipliée par deux. La flûte à bec basse, qui joue une octave plus grave que la flûte alto, est sa réplique exacte, mais deux fois plus grande. Regardons enfin les tuyaux de l'orgue ou les cordes d'une harpe dont la longueur ne varie pas linéairement.

Une autre particularité de l'octave est que nous percevons deux notes distantes d'une octave comme extrêmement consonantes, voire ayant la même hauteur.

Dans notre représentation, la distance entre deux notes sera celle perçue par l'oreille : linéaire ; c'est la distance intervallique. La valeur de la distance intervallique en demi-tons correspond à la distance le long du cercle chromatique (à l'instar des nombres indiquant les heures sur une horloge).

1.1.5. Progressions

Dans le cadre d'un parcours de modulations, décrit plus haut, notre modèle représentera des chemins possibles entre les notes qui seront considérées comme tonalités ou accords. En chaque point de l'espace, c'est-à-dire pour chaque note, le compositeur décidant d'un chemin ou la machine agissant au hasard se verront offrir au moins trois possibilités de déplacement. Par exemple Nord, Ouest et Sud. Limiter les choix directionnels possibles en chaque point à deux, par exemple Nord ou Sud, correspondrait à avancer ou revenir sur ses pas, c'est-à-dire se déplacer le long d'un cercle ou d'une droite. Ceci serait trop réducteur et le principe d'un parcours le long d'un chemin variable perdrait son essence.

1.1.6. Langage

Ce modèle est un langage artificiel dont les éléments de base sont des morphèmes : les noms des notes (*do, ré, mi,...*)²⁵.

Les notes dites naturelles ne comportent pas d'altération (# ou b). Dans le cas d'une note altérée on ajoutera un dièse # (ou un bémol b) à son symbole. Le *la dièse* (*la[#]*) se situera un demi ton au-dessus du *la naturel*, et le *la bémol* (*la^b*), un demi ton au-dessous. Les altérations permettent de n'utiliser que les sept noms des notes de la gamme diatonique (*do, ré, mi, fa, sol, la, si*). La gamme de *do majeur* ne comporte que des notes naturelles.

La relation d'analogie entre les symboles utilisés et les notes acoustiques se remarque sur un piano où les touches blanches correspondent aux notes naturelles et les noires aux notes altérées (# ou b). Il y a donc correspondance entre la couleur des touches du piano et le fait qu'une note soit naturelle ou non. Cette correspondance n'est pas symétrique (dans le sens invariance du terme) car les écarts entre les notes blanches ne sont pas constants.

Les classes de hauteurs ne sont habituellement pas dessinées et pensées comme idéogrammes, nous chercherons une représentation idéographique originale tenant compte des relations de symétrie de notre cadre, décrites au chapitre 1.1.7. Loin de pouvoir calculer scientifiquement la forme de ces idéogrammes, nous choisirons des symboles arbitrairement, en veillant à ce qu'ils respectent les quatre caractéristiques d'une langue : l'arbitraire du signe, la valeur purement négative et différentielle des lettres, les valeurs de l'écriture qui n'agissent que par leur opposition significative et l'indifférence du moyen de production (voir détails au chapitre 1.2.3).

1.1.7. Conclusions concernant le cadre

Nous recherchons un nouveau modèle géométrique représentant les douze notes dans un espace propre : chaque note aura sa propre position spatiale et son propre idéogramme différent. Le modèle recherché répondra aux conditions suivantes :

Douze notes

Les douze classes de hauteur également réparties et habituellement dessinées sur un cercle : chaque note étant d'autre part symbolisée par un idéogramme différent.

Symétrie

Invariance par rapport à la transposition : le modèle n'a pas de note privilégiée.

Correspondance entre distance intervallique et distance géométrique : tous les intervalles également perçus seront dessinés de même longueur.

²⁵ En général les classes de hauteurs sont représentées par un nombre (de 0 à 11) Les notes figurent parfois sous leur nom latin : (*do, ré, mi*), ou sont symbolisées par une lettre (*A, B, C*).

Au moins trois chemins possibles

Chaque note représentée par son idéogramme aura au moins trois voisins. Nous éliminons le cas où chaque note serait reliée à chacune des autres ce qui retirerait tout fondement à cette recherche.

1.1.8. Nouveautés et intérêts de cette étude

Les progressions et enchaînements harmoniques, qui seront utilisés ici, sont bien sûr connus des musiciens et des musicologues. Il s'agit de "modulations à la tierce" qui furent utilisées intentionnellement à partir du romantisme notamment chez Beethoven. Il existe aussi nombre d'autres modèles de représentation de l'espace des hauteurs et des relations entre accords. Nous en présenterons quelques un plus loin dans ce travail aux chapitres 3.2 et 3.3., lorsque nous appliquerons la méthode aux *Tonnetze* et aux autres représentations en réseau, il est aussi évident que les relations musicales ne sont pas nouvelles.

Seul le modèle mathématique et, plus précisément, sa visualisation sont inventés. Nous n'avons pas trouvé de représentation finie de l'espace des hauteurs respectant la correspondance entre distance spatiale et rapport de fréquence entre ces notes. Les réseaux trouvés sont soit infinis, soit partiellement symétriques.

Nous verrons aussi que des mathématiciens ont bien su décomposer l'espace des hauteurs de la même façon, symétrique, mais sans le représenter graphiquement en hyperespace.

Nous chercherons à comparer nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes, notamment en termes de distances.

Nous chercherons enfin des analogies et correspondances entre le modèle inventé et les modèles existants célèbres dans le milieu mathémusical.

1.2. ASPECTS SPECIFIQUES DISCIPLINAIRES

1.2.1. Aspects musicaux

1.2.1.1. Concernant le système musical

Tout "système" musical engendre des univers musicaux aux propriétés esthétiques bien spécifiques. Tout univers musical (même entrevu par l'intuition) appelle un système musical qui permet de le manipuler, de le structurer. C'est ainsi que, la recherche présentée ici étant exclusivement vouée à un modèle symétrique, le système musical qui en découlera sera lui aussi symétrique. Ce type d'univers est à opposer aux œuvres ayant un début et une fin bien définie, où l'auditeur habitué anticipe le déroulement de la composition et sent venir la fin de l'œuvre. Tandis qu'en musique tonale les progressions partent généralement d'une tonalité et y reviennent à la fin du morceau, les systèmes symétriques offrent la possibilité de

modulations cycliques susceptibles de se développer sans fin. Par exemple en musique tonale, une sonate ou une symphonie, un morceau de rock ou une java sont écrits en général dans une certaine tonalité, on parle de sonate en *la mineur*, de *Blues en fa*, etc. La tonalité principale prédomine et impose une hiérarchie aux différents accords qui composeront le morceau.

En musique tonale, *do*, par exemple, est chargé de projections futures : le fait d'écrire une œuvre en *do* connote la musique et l'auditeur sait plus ou moins consciemment quels sont les accords qui vont être utilisés et avec quelles fonctions.

Le cadre atonal, au contraire, se caractérise par le rejet de toute hiérarchie tonale. La musique atonale rejette le principe de centre tonal, ou centre de gravité vers lequel l'harmonie tend naturellement. Il n'y a pas non plus de hiérarchie entre les notes et la tonique n'est plus un pôle d'attraction particulier autour duquel l'œuvre devrait se construire.

1.2.1.2. Concernant le cadre

En ce qui concerne le modèle de représentation des classes de hauteurs, nous sommes dans les mêmes conditions que celles de la *Set Theory* d'Allen Forte (Forte, 1973)²⁶.

Les notes sont considérées comme les degrés de la gamme chromatique également tempérée. Elles sont encore appelées les douze classes de hauteurs (*Pitch Classes*). Nous pouvons compter douze notes différentes en regardant le clavier d'un piano : Sept touches blanches (*do, ré, mi, fa, sol, la, si*) et cinq noires correspondant aux notes altérées (les dièses et bémols)²⁷.

Nous sommes dans le cadre du tempérament égal²⁸ et utilisons le système de notation de la *Set Theory* où les classes de hauteurs sont ordonnées de 0 à 11 : *do* = 0, *do*[#] = 1, *ré* = 2, ... *si* = 11.

Pour ce modèle, qui n'a pour vocation que de représenter les douze notes, il ne sera bien sûr considéré que l'aspect hauteur de son. Les paramètres suivants n'étant pas recherchés : *Klangfarbe* ou timbre, intensité ou volume, position spatiale, etc.

En musicologie, l'analyse est une spécialité qui s'intéresse à l'œuvre dans sa globalité. Nous utiliserons par abus de langage le terme analyse pour l'étude des relations harmoniques et ne prenons pas en compte les aspects historiques, culturels, spirituels ou sensibles des œuvres étudiées.

²⁶ Pour un historique des relations mathémusicales et une historiographie détaillée des "méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle", nous renvoyons à la thèse de Moreno Andreatta (Andreatta, 2003).

²⁷ L'article "*Les tonalités musicales vues par un mathématicien*" de Michel Broué (Broué, 2002) est une bonne introduction pour le mathématicien débutant en musique.

²⁸ Le clavier bien tempéré de Bach n'est pas un clavier au tempérament égal, il donne une couleur spécifique à chaque tonalité, ce que ne fait pas par définition le tempérament égal. Voir l'article détaillé de Bradley Lehman (Lehman, 2005) citant les instructions originales de Carl Philipp Emanuel Bach (Bach, 1762).

1.2.2. Aspects mathématiques

L'utilisation des mathématiques est un aspect fondamental de cette étude, nous utiliserons le raisonnement déductif ainsi que différents outils de calcul en divers points de notre recherche. Il faudra, tout d'abord, mettre en équation et traduire les conditions que nous avons imposées concernant le futur modèle idéographique et musical. Nous calculerons ensuite des projections du modèle afin de le visualiser. Enfin nous vérifierons au chapitre 2.3.5 que les différentes méthodes mènent au même résultat.

L'intérêt majeur de la méthode employée est de pouvoir la réutiliser pour l'appliquer à d'autres objets musicaux :

- claviers d'instruments ;
- réseaux de relations entre notes ;
- réseaux d'accords ;
- schémas de modulations.

1.2.2.1. L'utilisation des graphes

Un graphe est un objet mathématique pouvant se représenter par une série de points, appelés sommets, et de segments les reliant : les arcs ou arêtes. Un arc relie deux sommets entre eux : un sommet de départ et un sommet d'arrivée. Sur un dessin, on peut représenter les sommets par des points et les arcs par des flèches. Dans notre cas les notes seront les sommets du graphe et les arêtes, les liaisons entre elles. En considérant le modèle pour les parcours de modulation, les points seront les accords ou tonalités, au sens large du terme ; les arcs seront les possibilités de modulations c'est-à-dire les chemins possibles.

1.2.2.2. Démarche

Nous utiliserons les propriétés spectrales du laplacien normalisé de la matrice d'adjacence du graphe.

Aux notes (classes de hauteurs) et aux relations entre elles correspondra un graphe que nous pourrons dessiner avec des sommets (les notes) et les arcs (les liaisons).

A ce graphe sera associé un tableau de nombres appelé sa matrice d'adjacence. Cette matrice sera composée de douze lignes et colonnes, (douze points de notre graphe). La relation entre deux notes se traduit par une valeur dans le tableau. Par exemple, si les points 0 et 3 sont liés par un arc, la case en ligne 0 et colonne 3 (première ligne et quatrième colonne), ainsi que la case en ligne 3 et colonne 0 contiendra une valeur (voir tableau 1-1 ci-dessous).

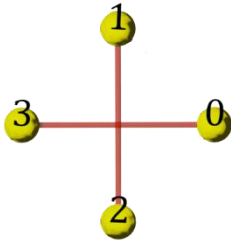
Graphe	Matrice d'adjacence
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tableau 1-1 : Un graphe et sa matrice d'adjacence

Dans notre cas et au début de l'étude, tous les liens seront de même valeur. Notre matrice sera composée de "zéro" (pas de relation entre les deux points) ou "un" (Arc reliant ces points). Une fois cette matrice créée, elle sera transformée par la fonction laplacien²⁹ puis décomposée afin de la caractériser. Le laplacien est une transformation de la matrice nécessaire avant sa décomposition. Nous utiliserons un laplacien normalisé afin d'être dans des conditions d'études standardisées (Chung, 1997).

Le type d'analyse utilisée s'appelle analyse spectrale, elle fait apparaître des propriétés remarquables de la matrice : les espaces propres et valeurs propres. L'ensemble des valeurs propres constitue le spectre de la matrice. Suite à cette décomposition spectrale, nous pourrions caractériser et analyser ces espaces particuliers (espaces propres). Ce sont enfin les notes, sommets du graphe, que nous visualiserons en images de synthèse dans ces espaces propres. Les arêtes du graphe ainsi projetées feront apparaître des figures géométriques remarquables. La figure 1-3 ci-dessous montre la démarche utilisée.

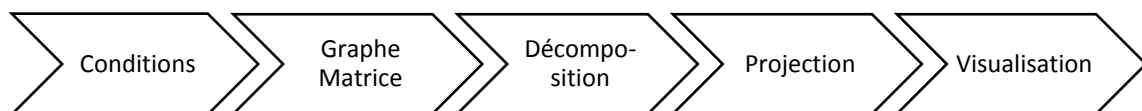


Figure 1-3 : Des conditions de départ à la visualisation

1.2.2.3. Les autres outils

Une recherche par les quaternions³⁰ sera aussi évoquée. Nous verrons que le modèle calculé en utilisant les quaternions, puis transformé en graphe donne un résultat isomorphe³¹ à celui trouvé par la théorie de graphes.

Nous présenterons par ailleurs les recherches effectuées par d'autres mathématiciens, qui obtiennent la même décomposition de l'espace, avec

²⁹ Laplacien : du nom du mathématicien Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827).

³⁰ Les quaternions sont des nombres à quatre dimensions utilisés, entre autre en imagerie médicale.

³¹ Dans le sens : similaire concernant la forme.

des outils algébriques utilisant entre autres la théorie des groupes. Ces outils font appel à des notions mathématiques qui sont plus difficiles d'accès au profane que notre démonstration pas à pas, illustrée d'exemples graphiques. Les autres outils de projection spatiale utilisés pour la visualisation seront décrits sommairement.

1.2.2.4. Résultats numériques et littéraux

Un résultat numérique est un résultat obtenu par un programme qui cherche une solution et nous restitue une valeur approchée, par exemple 3.1416, 1.414 et 2. (ce que chacun reconnaîtra, mais sans certitude comme π , $\sqrt{2}$ et 2). Si le programme restitue 3.14 peut-on encore être sûr qu'il s'agissait bien de π ?

Un calcul littéral se fait en général à la main, ou par un logiciel capable de le traiter si le problème n'est pas trop complexe, et donne un résultat sous forme de chiffres et de lettres c'est-à-dire π ou $\sqrt{2}$. Il aurait pu suffire à notre démonstration de laisser les logiciels effectuer les opérations complexes de décomposition des matrices et de regarder les projections obtenues. Cette approche numérique montrait déjà des résultats certains. Parce que les résultats donnés par les logiciels étaient approximatifs et qu'au vu de la symétrie et de la régularité du modèle, celui-ci mérite d'être caractérisé par des valeurs exactes, nous avons effectué les calculs de façon littérale. Les résultats numériques servant de vérification.

1.2.2.5. Nouveautés

Nous avons trouvé dans la littérature des modèles décrivant les relations entre les notes telles que nous les cherchions³², mais pas de représentation graphique finie satisfaisant au principe d'équivalence, "Distance Géométrique" \Leftrightarrow "Distance Intervallique", que nous recherchons.

Les décompositions existantes de l'espace des hauteurs menant au même résultat sont effectuées à l'aide de méthodes lourdes et complexes (pour le non spécialiste s'entend).

La théorie spectrale des graphes n'est à notre connaissance pas utilisée dans le domaine mathémusical.

La modélisation par quaternions ainsi que la coloration des sommets d'un graphe, au sens mathématique du terme, par des nombres complexes sont originales dans ce domaine.

Cette recherche se trouve au croisement de plusieurs domaines mathématiques tels que la géométrie, pour les projections et visualisations, l'algèbre, pour les calculs et les quaternions, et la combinatoire pour les graphes.

³² Par exemple : au tore de Guerino Mazzola (Mazzola, 2002) ne manque que l'invariance des distances, un tore ayant un petit et un grand rayon. Un modèle 4D n'a pas été visualisé.

1.2.3. Aspects linguistiques et sémiotiques

1.2.3.1. Cadre

Dans cette étude, nous utiliserons un système idéographique original et démontrerons qu'il respecte les caractéristiques d'un langage en nous référant principalement aux travaux de Ferdinand de Saussure³³ et à son "Cours de Linguistique Générale" (Saussure & Engler, 1989).

1.2.3.2. Respect des caractéristiques d'un langage

Dans son *Cours de linguistique générale*, Saussure souligne quatre caractéristiques importantes définissant un langage.

1°) L'arbitraire du signe

"Le lien entre le signifiant et le signifié est arbitraire" : par exemple le concept de "chat" (signifié) est associé à des images acoustiques (signifiants) différentes selon les langues. Par exemple : cat, chat, kedi, mão, ... ce qui illustre le caractère arbitraire du signe.

Dans notre cas, il n'y a pas de relation entre le dessin représentant la note *do* et la note *do* elle-même. Nous pouvons très bien choisir des couleurs et des formes différentes.

2°) La valeur des lettres est purement négative et différentielle

Le terme "négative" est à considérer dans le sens de la "négation", (qui est nié) et non au sens mathématique du terme où la négation d'un nombre est son opposé (2 et -2).

Le terme "différentielle" n'est pas non plus pris au sens mathématique usuel (accroissement infinitésimal défini par Leibniz), mais au sens de "qui se définit en se différenciant de l'autre", c'est-à-dire représenté par un sujet individualisé seulement. Chaque signe doit être unique et différent des autres. Dans notre cas chaque note sera différente des autres et représentée différemment.

3°) les valeurs de l'écriture n'agissent que par leur opposition significative

Cette proposition est détaillée de la façon suivante : "Les valeurs de l'écriture n'agissent que par leur opposition réciproque au sein d'un système défini, composé d'un nombre déterminé de lettres".

Le signe graphique étant arbitraire, sa forme importe peu, et n'a d'importance que dans les limites imposées par le système, les représentations des notes existeront aussi par leur opposition entre elles.

³³ Ferdinand de Saussure (1857-1913), linguiste suisse considéré comme fondateur de la linguistique moderne, a créé les fondements de la sémiologie comme science générale des signes.

4°) Le moyen de production du signe est totalement indifférent car il n'intéresse pas le système

Qu'une lettre soit peinte en blanc ou en noir, gravée ou sculptée : c'est sans importance pour le système et leur signification ne change pas. Dans notre cas, le moyen de restitution physique des idéogrammes ne changera pas leur signification. Ceux-ci pourront être imprimés, affichés sur écran ou projetés sans pour autant que leur signification ne change.

1.2.3.3. Concernant le système d'écriture

La sémiologie est *"la science qui étudie la vie des signes au sein de la vie sociale"* (Saussure & Engler, 1989).

Nous nous inscrirons clairement dans un schéma idéographique, où chaque signe représentera une note (toujours au sens "classe de hauteur" du terme. Nous aurons donc douze idéogrammes différents. Un intérêt des idéogrammes est qu'ils peuvent théoriquement être compris par des gens de langues différentes, à l'instar des chiffres romains (I, II, V,...) qui représentent des valeurs identiques pour des locuteurs de langues différentes.

Dans notre cas, les signes pourront être bidimensionnels (j'utilise à dessein un terme géométrique, Jaques Bertin utilise le terme "variable visuelle"). Les deux dimensions sont forme et couleur. Contrairement à l'écriture classique où seule la forme du morphème³⁴ est pertinente le cas des idéogrammes à plusieurs dimensions³⁵ nous est familier. En effet : les panneaux de signalisation routière sont en partie des idéogrammes à deux dimensions : forme et couleur³⁶.

1.2.3.4. L'interprétation du modèle trouvé par la mathématique

Seul le raisonnement mathématique permettra de calculer un modèle à partir des conditions que nous nous sommes fixées, néanmoins, le modèle engendré devra satisfaire aux critères de la définition d'une langue artificielle. La recherche du modèle selon les conditions définies devra donc engendrer un système de représentation des notes avec un système idéographique adapté.

³⁴ Les notes peuvent être considérées comme des morphèmes, la plus petite unité porteuse de sens qu'il soit possible d'isoler dans un énoncé. Par exemple, dans "Château", il y a deux morphèmes : "Châ-" et "-Teau".

³⁵ Dans son article *"la graphique"* repris dans (Bertin, 1977) le cartographe et père de la sémiologie graphique, Jacques Bertin, distingue huit variables visuelles "aux propriétés inégales {forme, orientation, couleur, grain, valeur, taille et les deux dimensions du plan}. Nos symboles étant destinés à être placés dans un espace projeté selon une perspective particulière, les notions de taille ou d'orientation ne sont applicables que relativement entre symboles. Nous ne les utiliserons pas. Nous travaillerons avec "forme et couleur valeur et grain". En utilisant le langage infographique actuel, nous préférons les termes "luminosité et texture" aux termes originaux de "valeur et grain".

³⁶ La forme d'un panneau est codée (carré = indication, triangle = danger), aussi l'est sa couleur (fond jaune = temporaire ; fond blanc = permanent). Une combinaison des deux est alors possible : par exemple, le panneau carré à fond jaune symbolise une indication temporaire.

1.3. DEFINITIONS PROPRES A CE MEMOIRE

Nous utilisons les définitions suivantes.

Graphe Planet

Objet mathématique décrivant la répartition des douze notes et leurs liaisons³⁷. Sa représentation graphique peut utiliser les symboles du *Modèle Planet*.

Modèle Planet

Système de représentation graphique d'objets musicaux : notes ou accords comprenant des coordonnées géométriques 2D, 3D ou 4D³⁸ ainsi qu'un système idéographique original à plusieurs dimensions.

Planet-3D

Représentation de l'ensemble des douze classes de hauteurs et de leurs symboles associés sur un volume 3D. Ce volume est analogue à un tore 3D, mais certaines faces se coupent permettant ainsi de conserver l'invariance entre distances intervallique et géométrique. C'est une projection cavalière du modèle *Planet-4D*. Voir la sculpture 3D en annexe (chapitre 6.6.1) et l'animation correspondante (Clip F 3 : Torus and Traditional Tonnetze, p. 295)

Planet-4D

Matérialisation de l'ensemble des douze classes de hauteur en surface d'une hypersphère avec le système idéographique *Planet*. Afin de le visualiser, le modèle est mis en rotation. La position de l'utilisateur est centrale et ne change pas, c'est l'*Hypersphère* qui tourne sur elle-même³⁹. Les sommets du modèle peuvent être aussi des accords de même type ou des gammes. Pour une meilleure lisibilité, les sommets les plus éloignés du spectateur sont floutés⁴⁰.

Planet-S3

Matérialisation de l'ensemble des douze classes de hauteur sur l'hypersphère unité.

Hypersphères des Accords

Extensions du modèle *Planet-4D* en considérant ses sommets comme des notes, permettant de positionner des accords sur une hypersphère. Nous distinguons plusieurs versions :

³⁷ *Graphe Planet* aussi présenté sous l'appellation *Planet Graph* (Baroin & Ferré, 2010).

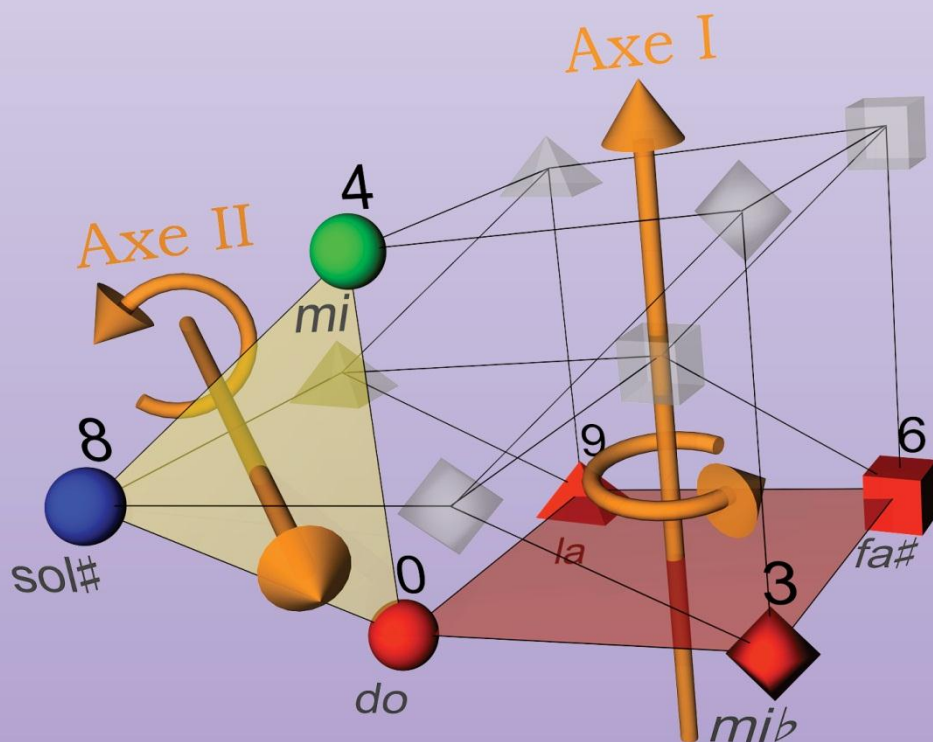
³⁸ Par similitude avec les termes communs 2D et 3D nous emploierons l'acronyme 4D pour quadridimensionnel.

³⁹ La description du modèle est publiée dans (Baroin, 2011a).

⁴⁰ Par analogie avec le *Tore des Tierces*, le modèle *Planet-4D* amputé de son système idéographique et sans animation peut être désigné comme *Hypersphère des Tierces*.

- *Hypersphère Tonnetz* : construite à partir du modèle *Planet-4D* de façon analogue à l'espace dual du *Tonnetz*, les symboles des accords sont placés au centre des projections 3D des notes les constituant. Le système idéographique comporte trois paramètres, seuls les accords parfaits sont pris en compte. Les sommets les plus éloignés du spectateur sont obscurcis pour simplifier la représentation.
- *Hypersphère Généralisée* : permet de représenter n'importe quel accord en utilisant le barycentre sphérique des notes qui le constituent. Les accords non parfaits utilisent un symbole de couleur semblable à celui de l'accord parfait approchant, ils ne sont dessinés que lors de leur utilisation. Les sommets les plus éloignés du spectateur sont assombris pour alléger l'illustration.
- *Hypersphère Généralisée AnySet* : présentation graphique alternative de *l'Hypersphère des Accords* adaptée à la musique atonale. Les symboles des accords parfaits sont grisés et transparents. Les douze notes, sommets du modèle *Planet-4D*, sont toutes visibles. Seules celles utilisées sont mises en couleur.

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

Etude mathématique

Cadre

Dans "les règles pour la direction de l'esprit", René Descartes affirmait qu' "il n'y a pas d'autres voies qui s'offrent aux hommes, pour arriver à une connaissance certaine de la vérité, que l'intuition évidente et la déduction nécessaire". Ainsi, la recherche qui fut effectuée naguère de façon intuitive (avec une approche géométrie empirique) est complétée par un raisonnement mathématique plus rigoureux utilisant la théorie des graphes.

Nous allons traduire les conditions aux limites en termes de graphe, puis rechercher un graphe satisfaisant qui soit composé d'éléments simples. Nous procéderons pas à pas, par élimination, afin de passer en revue et de trouver une correspondance musicale à chacun des modèles rencontrés.

Il restera enfin un seul graphe, pour lequel nous choisirons une représentation graphique.

La seconde partie de ce chapitre concerne l'étude du graphe trouvé : les propriétés du graphe et de son spectre. Nous essayerons si possible d'associer à chaque propriété du graphe un lien dans un cadre musical. L'étude spectrale permettra de visualiser le graphe de façon géométrique et d'y rechercher des motifs familiers. Nous en déduirons alors le modèle géométrique.

Afin de montrer, s'il en était besoin, la cohérence des mathématiques, ou de nous assurer que tous les chemins mènent bien à Rome, nous exposerons en troisième partie, un raisonnement algébrique utilisant les quaternions. Cette approche témoigne de la liaison entre des domaines mathématiques a priori distincts que sont la géométrie, l'algèbre et les mathématiques discrètes.

La quatrième partie sera consacrée à l'étude du modèle géométrique. Afin de le comparer aux modèles existants et de trouver des propriétés musicales, nous détaillerons ses propriétés

La cinquième partie concerne des généralisations possibles du graphe trouvé, leurs conséquences et leurs applications musicales.

Enfin, nous construirons, à partir du modèle géométrique simple, l'espace des accords parfaits tel que les mathémusiciens⁴¹ le font habituellement, puis nous essaierons d'élargir le concept de représentation d'accords sur une hypersphère à n'importe quel agrégat de notes.

⁴¹ Terme popularisé lors des séminaires Mamux et MamuPhi de l'Ircam organisés par Carlos Agon et Moreno Andreatta voir aussi (Andreatta, 2003).

2.1. MODELISATION PAR LA THEORIE DES GRAPHES

Nous utilisons certains aspects de la théorie des graphes pour rechercher un modèle satisfaisant aux conditions définies dans l'introduction.

2.1.1. Rappel des conditions

2.1.1.1. Douze notes

Ainsi que dans la *Set Theory* d'Allen Forte (Forte, 1973), nous considérons les douze degrés de la dodécaphonie également répartis, habituellement représentés sur un cercle. Chaque note sera, d'autre part, symbolisée par un idéogramme différent.

2.1.1.2. Symétrie

Considérée comme une invariance par rapport à la transposition, la symétrie signifie que le modèle recherché n'a pas de note privilégiée. Considérée comme relation d'équivalence telle que tous les intervalles de mêmes valeurs soient dessinés de même longueur ; la symétrie associera, pour chaque distance intervallique⁴², une distance géométrique ou, le cas échéant, une distance en termes de graphes.

2.1.1.3. Au moins trois chemins possibles

Chaque note représentée par son idéogramme sera, dans le modèle, en voisinage avec au moins trois autres notes. Nous éliminons le cas où toutes les notes seraient reliées entre elles, ce qui ôterait tout intérêt à cette recherche.

2.1.2. Notions élémentaires nécessaires à la démonstration

Nous présentons, ici, quelques notions de théorie des graphes qui seront utilisées dans la démonstration.

2.1.2.1. Notation

Nous notons G_n , un graphe quelconque à n sommets. G_4 est ainsi le cas général d'un graphe à 4 sommets.

⁴² La distance perçue par l'auditeur est aussi la distance intervallique ou l'intervalle musical entre deux notes. Voir la note⁸⁷ en p. 128.

2.1.2.2. La pondération

La pondération d'une arête est la valeur relative de celle-ci par rapport aux autres liaisons. Si le graphe n'est pas pondéré, toutes les arêtes sont de même poids unitaire. Dans le cas, par exemple d'un graphe modélisant les flux routiers, la pondération des liaisons représente le trafic constaté ou prévu entre deux villes. La matrice d'adjacence d'un graphe non pondéré ne contient que des valeurs unité et des zéros. Dans le cas d'un modèle musical, la pondération signifie que certaines liaisons sont plus importantes que d'autres.

2.1.2.3. L'orientation

Un graphe orienté, appelé aussi graphe dirigé ou digraphe, possède des directions privilégiées : certaines arêtes sont unidirectionnelles. Dans un graphe dirigé, deux points sont reliés dans un sens seulement. Si nous reprenons l'exemple d'un graphe modélisant des flux routiers, l'orientation représente les sens de circulation possibles. La matrice d'adjacence d'un graphe orienté n'est pas symétrique. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté étant symétrique, celle-ci possède des valeurs propres réelles.

Dans le cas d'un modèle représentant des accords musicaux, l'orientation définit une direction de parcours privilégiée. Si les sommets représentent des classes de hauteurs et que les intervalles sont considérés indifféremment en montant ou en descendant, le graphe est non orienté.

2.1.2.4. Le graphe simple

Appelé parfois graphe strict, un graphe simple est non pondéré et non orienté, il ne contient pas de boucles. Par conséquent, sa matrice d'adjacence est symétrique et binaire : elle ne comporte que des 0 ou des 1.

2.1.2.5. Familles de graphes simples utilisés

Il existe une multitude de familles de graphes simples, leur appellation rappelle en général la forme de leur représentation géométrique. Notons pour information les graphes étoiles, les arbres, les diamants,... Parmi les graphes simples, nous utiliserons des graphes cycle et des graphes complets⁴³ car ce sont des graphes circulants (voir chapitre 2.1.2.7). La figure 2-1 ci-dessous présente les graphes cycles et complets à 5 sommets.

⁴³ Les graphes n -cubes Q_n et les Webs W_{kn} sont aussi circulants. Nous ne les retenons pas car ce sont déjà des combinaisons de cycles.

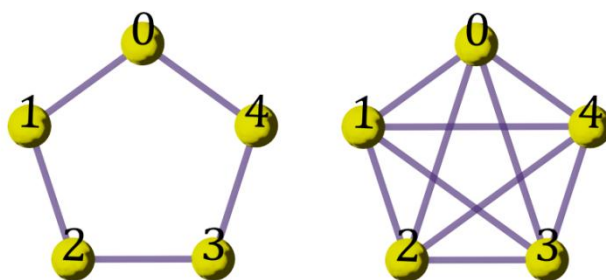


Figure 2-1 : Un exemple de graphes cycle et de graphe complet

Un graphe cycle, noté C_n , est constitué d'un unique cycle élémentaire. C'est un graphe non orienté d'ordre n à n arêtes, chacun de ses sommets est de degré 2 (il a deux voisins). Il s'appelle aussi graphe cyclique, ou n -cycle.

Par exemple, dans une ronde d'enfants, un graphe représentant l'ensemble des danseurs et exprimant la relation "donne la main à" est un graphe cycle⁴⁴. Chaque danseur est un sommet à deux voisins.

Un graphe complet, noté K_n , possède n sommets, tous reliés entre eux. Par exemple, dans une réunion où tous les invités se connaissent, le graphe représentant l'assemblée avec la relation "est connu de" est un graphe complet. Chaque sommet est relié à tous les autres. Nous utilisons les graphes complets sans boucles, c'est-à-dire que nous ne prenons pas en compte le fait qu'un invité se connaisse lui-même. D'autres graphes complets utilisent les boucles, par exemple pour les études de démontabilité. Nous étudions le cas des graphes avec boucles au paragraphe 2.5.2.

Distance en termes de graphe

Nous considérons la distance en termes de graphe comme le nombre d'arêtes minimum entre deux sommets. C'est le nombre minimal d'étapes à parcourir pour rejoindre le sommet considéré. Prenons pour exemple un graphe simple associé au réseau de métro d'une ville. Les sommets symbolisant des stations et les arêtes représentant les liaisons entre gares, cette distance correspond simplement au nombre de tronçons à traverser.

Graphes isomorphes

En linguistique, isomorphisme est un terme qui évoque une ressemblance entre deux structures. Pour les problèmes de correspondance entre termes, voir (Gentilhomme, 1973).

En mathématiques, l'isomorphisme de graphes se définit ainsi : soit un graphe $G(V, E)$ avec V , l'ensemble des sommets de G et E , l'ensemble de ses arêtes. Un isomorphisme de G vers H est une bijection $f: V(G) \rightarrow V(H)$ telle que $(u, v) \in E(G)$ ssi $(f(u), f(v)) \in E(H)$ (West, 2001).

Si il y a un isomorphisme de G vers H alors les deux graphes sont isomorphes, on écrit alors $G \cong H$.

⁴⁴ On trouve parfois le graphe cycle sous le terme graphe circulaire. Appellation à ne pas confondre avec le graphe circulaire (traduction de *circular graph*), qui désigne un diagramme statistique circulaire de répartition, dit "camembert".

Deux graphes isomorphes ont la même structure, quelle que soit leur représentation graphique ; il est possible de passer de l'un à l'autre en déplaçant les sommets sans toucher aux liaisons. Imaginons un ensemble de balles reliées par des ficelles : si l'on peut passer d'une structure à l'autre sans modifier de lien, les graphes sont isomorphes.

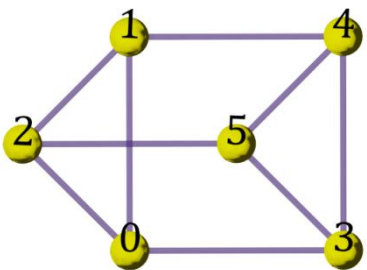
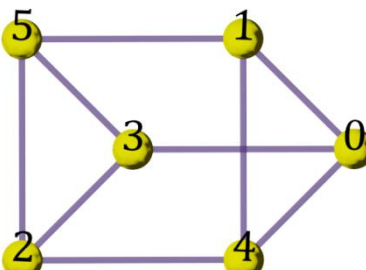
Graphe A	Graphe B
 <p>Matrice d'adjacence :</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Valeurs propres : $\{3, -2, -2, 1, 0, 0\}$</p>	 <p>Matrice d'adjacence :</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Valeurs propres : $\{3, -2, -2, 1, 0, 0\}$</p>

Figure 2-2 : Deux graphes isomorphes

Par exemple, les deux graphes représentés ci-dessus (figure 2-2) sont effectivement différents : les points 2 et 3 ne sont liés que dans le premier graphe. Par conséquent, les matrices d'adjacences sont nécessairement différentes.

Si deux graphes sont isomorphes, alors leurs valeurs propres sont identiques. Toutefois, la réciproque n'est pas toujours vraie (Cvetkovic, Doob, & Sachs, 1980).

Dans l'exemple ci-dessus, la bijection qui transforme le graphe A en graphe B est :

$$f(0) = 4 ; f(1) = 1 ; f(2) = 0 ; f(3) = 2 ; f(4) = 5 ; f(5) = 3.$$

Les deux graphes ayant les mêmes valeurs propres, ils sont donc isomorphes.

L'isomorphisme représenté ci-dessus est trivial et intuitif. Dans le cas de graphes plus complexes, l'utilisation du spectre (voir parag.2.1.2.12, p. 47) s'impose.

2.1.2.6. Matrice d'adjacence

En schématisant, une matrice est un objet mathématique usuel représenté par un tableau de nombres, arrangés en lignes et colonnes.

Dans le cas d'un graphe, la matrice d'adjacence est un tableau qui fait état des relations entre chacun des sommets du graphe. Plus formellement, la matrice d'adjacence A d'un graphe fini G_n à n sommets est une matrice carrée de dimension $n \times n$ dont l'élément $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes liant le sommet i au sommet j .

Dans le cas d'un graphe non pondéré (toutes les liaisons sont équivalentes) les coefficients prendront la valeur 1 ou 0

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 : \text{si } i \text{ et } j \text{ sont liés;} \\ 0 : \text{autres cas.} \end{cases}$$

De façon élémentaire : s'il y a un chemin allant du point A au point B, nous écrivons 1 dans la case appartenant à la colonne A et à la ligne B, sinon nous y inscrivons 0.

Dans le cas d'un graphe non orienté (sans direction privilégiée), la relation de i vers j est la même que celle de j vers i . La matrice est symétrique : $A_{i,j} = A_{j,i}$. On note aussi $A = A^T$: la matrice est égale à sa transposée. La figure 2-3 ci-dessous propose une représentation de matrice symétrique.

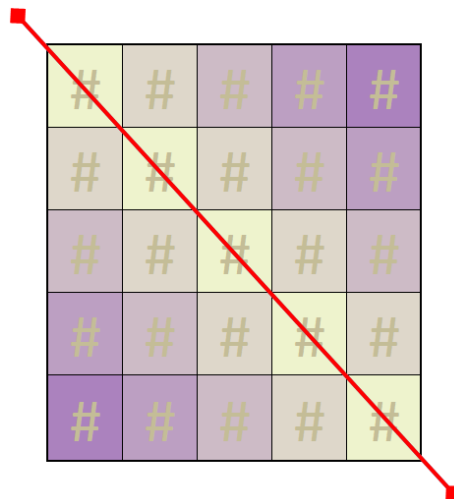


Figure 2-3 : Une matrice symétrique

Si, comme dans le cadre de cette étude, nous ne considérons pas de boucles (liaison d'un sommet vers lui-même) la diagonale est composée de zéros ; La matrice d'adjacence du graphe est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{0,1} & 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & 0 & \dots & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{0,n-1} & a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.2.7. Graphe circulant

C'est un graphe où tous les sommets jouent le même rôle : ils sont interchangeables par permutation circulaire. C'est par exemple le cas des graphes cycles et des graphes complets. Ce type de graphe exprime en

musique l'invariance des intervalles par rapport à la transposition⁴⁵. La définition d'un graphe circulant est la suivante :

Soit X un groupe fini et S un sous-ensemble symétrique de X , le graphe de Cayley $G(X, S)$ est le graphe dont les sommets sont les éléments de X , et $\{x; y\}$ est une arête si et seulement si $xy^{-1} \in S$. "Les graphes de Cayley définis sur les groupes cycliques sont habituellement appelés des graphes circulants"(Pécher, 2008).

Un graphe circulant possède une matrice d'adjacence circulante.

2.1.2.8. Matrice circulante

C'est une matrice carrée dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire des coefficients⁴⁶. Les matrices circulantes sont associées à la transformée de Fourier, on les trouve en théorie de traitement du signal et en musique chez Emmanuel Amiot⁴⁷. La figure 2-4 suivante illustre cette propriété.

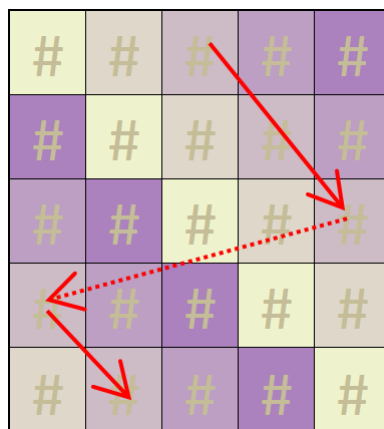


Figure 2-4 : Une matrice circulante

Une matrice circulante C de taille n est de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} \\ C_{n-1} & C_0 & C_1 & \dots & C_{n-2} \\ C_{n-2} & C_{n-1} & C_0 & \dots & C_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients C_i sont généralement des nombres complexes, dans le cas d'une matrice d'adjacence d'un graphe ceux-ci sont des nombres réels.

Une matrice circulante possède des propriétés particulières qui facilitent son étude et, par conséquent, la caractérisation du graphe

⁴⁵ Les graphes circulants sont utilisés par exemple en informatique pour coordonner la répartition des charges de calcul entre plusieurs ordinateurs reliés et servent à la conception de microprocesseurs à haute intégration.

⁴⁶ La permutation se fait de vers la droite en descendant. On parle parfois de matrice anticirculante ou circulante gauche quand on effectue un décalage à gauche des coefficients en passant d'une ligne à la suivante.

⁴⁷ Voir quelques applications musicales de Fourier (Amiot, 2009a, 2009b; Amiot, Noll, Agon, & Andreatta, 2006).

associé. Les calculs spectraux, concernant les grandes matrices, qui sont généralement inconcevables sans l'aide d'un ordinateur, sont facilités, voire souvent réalisables manuellement dans ce cas particulier.

2.1.2.9. Laplacien

Le laplacien d'une matrice est une autre matrice calculée à partir de celle-ci. Elle permet de faire apparaître des propriétés remarquables, pour le mathématicien. De façon plus formelle, si G est un graphe à n sommets, non pondéré et sans boucles, son laplacien est la matrice L telle que

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{si } i = j; \\ -1, & \text{si } i \neq j; \\ 0, & \text{autres cas.} \end{cases}$$

Le laplacien se calcule matriciellement de la façon suivante : $L=D-A$, avec A , la matrice d'adjacence du graphe et D , la matrice diagonale des degrés des sommets.

2.1.2.10. Laplacien normalisé

C'est un autre tableau de valeurs aux propriétés intéressantes pour l'étude du graphe. Le laplacien normalisé permet une standardisation des calculs, une meilleure consistance avec les définitions utilisées dans d'autres domaines des mathématiques, et de pouvoir généraliser plus facilement les propriétés des graphes réguliers aux autres graphes. Cette approche présente un traitement cohérent pour un graphe quelconque. Ses valeurs propres ne sont jamais négatives (Chung, 1997).

La définition du laplacien normalisé est :

Soit un graphe G à n sommets, non pondéré, et sans boucle, son laplacien normalisé est la matrice L telle que :

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \text{ et si } \deg(v_i) \neq 0; \\ \frac{-1}{\sqrt{\deg(v_i) \deg(v_j)}}, & \text{si } i \neq j \text{ et si } v_i \text{ et } v_j \text{ sont adjacents;} \\ 0, & \text{autres cas.} \end{cases}$$

Il se construit matriciellement de la façon suivante :

$$L = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}},$$

avec L , le laplacien et D , la matrice diagonale des degrés des sommets.

2.1.2.11. La projection spectrale

Un spectre peut être imaginé comme l'apparence d'une structure sous-jacente d'un graphe, une vision spéciale permettant de repérer ce qu'il y a dans un graphe complexe en l'observant sous certains angles intéressants. A un graphe à 12 sommets correspond théoriquement un objet à 12 dimensions, donc inimaginable pour un esprit humain. Par contre, ses projections remarquables dans des espaces à 2, 3 ou 4 dimensions peuvent

faire apparaître des formes géométriques que nous saurons reconnaître et analyser.

De manière plus complète : la projection spectrale du laplacien normalisé de la matrice d'adjacence du graphe permet la transformation vers un objet géométrique.

2.1.2.12. Le spectre : valeurs et vecteurs propres

Le spectre est l'ensemble des valeurs propres du graphe⁴⁸. A chaque valeur propre est associé un vecteur propre. Les valeurs propres permettent de caractériser le graphe et d'en déduire certaines propriétés. La propriété qui nous intéresse principalement est la multiplicité de ces valeurs propres, elle détermine la dimension des sous-espaces propres que nous utilisons pour la représentation géométrique. Les sous-espaces propres, résultats qui nous importent, sont par définition composés de l'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre. Comme chaque valeur propre apparaît une ou plusieurs fois, c'est cette multiplicité qui donne la dimension des sous-espaces propres.

A une valeur propre apparaissant deux fois sera associé un sous-espace propre de dimension deux, c'est-à-dire un plan. Dans le cadre de cette étude, nous passons d'un graphe, objet abstrait, à une ou plusieurs représentations géométriques en utilisant les calculs spectraux. Cette méthode sera appliquée aux modèles musicaux existants dans le troisième chapitre de ce mémoire (3.3).

2.1.3. Traduction des conditions en termes de graphe

Nous traduisons ici les conditions définies dans l'introduction directement en termes de propriétés pour le graphe recherché.

2.1.3.1. Douze Notes

Chaque note étant un sommet, le graphe aura donc douze sommets, ce qui implique que sa matrice d'adjacence sera d'ordre 12. Nous recherchons un graphe de type G_{12} . G étant le terme générique pour un graphe quelconque.

Lors de la projection finale dans les espaces propres, les notes du modèle trouvé seront dessinées avec leurs idéogrammes respectifs. La caractérisation et le choix des idéogrammes se feront dans un second temps.

⁴⁸ Le calcul de valeurs et vecteurs propres est une technique mathématique qui connaît de nombreuses applications en physique, électronique ou mécanique. Dans le cas des graphes, bien que leurs représentations soient intuitives (surtout pour les petits graphes), ces derniers ne sont que des objets mathématiques abstraits décrivant des relations entre leurs sommets. Afin d'obtenir un objet géométrique, il convient d'analyser le graphe et de le projeter dans ses espaces propres. Cette technique et ses applications sont décrites par F.K. Chung dans l'ouvrage de référence "Spectral Graph Theory"(Chung, 1997).

2.1.3.2. Symétrie

Considérée comme une invariance par rapport à la transposition, la symétrie signifie que le modèle recherché n'a pas de note privilégiée, le graphe recherché sera donc non orienté et la matrice sera circulante. Chaque note jouant le même rôle, les sommets des graphes auront tous les mêmes caractéristiques. La relation entre deux notes n'aura pas de direction privilégiée. Ceci se traduit par : graphe non orienté et matrice symétrique. L'invariance par rapport à la transposition se traduisant par "matrice circulante", la matrice d'adjacence sera symétrique et circulante.

Dans ce cas la propagation des coefficients prend une forme particulière.

La matrice étant circulante, nous avons : $a_{i,j} = a_{i+1,j+1}$; la matrice étant symétrique, nous avons : $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Le coefficient $a_{0,1}$ se propage de façon circulante en $a_{1,2}$; par symétrie on le retrouve aussi en $a_{2,1}$ et par circulation, il se propage aussi en $a_{0,n-1}$, voir 2-5.

Cette propagation résulte en une symétrie sur la première ligne de la matrice telle que : $a_{0,j} = a_{0,n-j}$. Dans le cas d'un G_{12} , la première ligne est symétrique par rapport au point 6.

La répartition des coefficients d'une matrice circulante et symétrique est illustrée ci-dessous (figure 2-5).

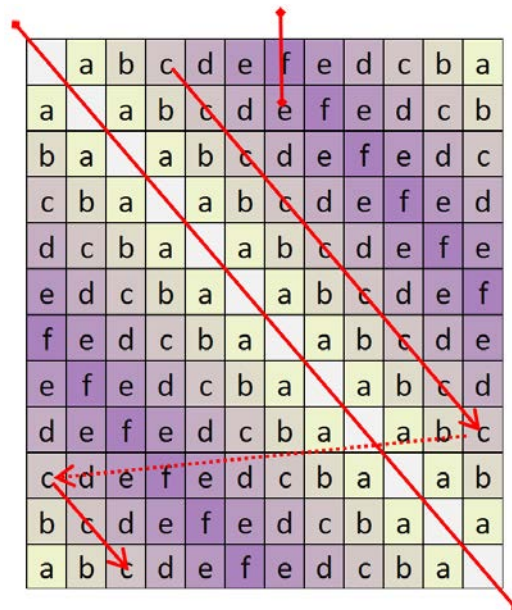


Figure 2-5 : Une matrice circulante et symétrique

La matrice d'un graphe circulant et non orienté laisse apparaître une symétrie axiale sur la première ligne, les autres lignes sont déduites par circulation. Pour un G_n , avec n pair, il n'y a que $n/2$ coefficients différents. Dans notre cas de G_{12} non pondéré, nous aurons 6 coefficients différents, de valeur 0 ou 1.

2.1.3.3. Au moins trois chemins possibles

Chaque note représentée par son idéogramme sera, dans le modèle, en voisinage avec au moins trois autres notes. Le graphe possédera ainsi des sommets d'ordre au moins 3. Comme nous éliminons le cas où toutes les notes seraient reliées les unes aux autres : l'ordre sera de 11 au maximum.

En conclusion, le graphe G_{12} recherché aura les propriétés suivantes :

- Matrice d'adjacence A : circulante et symétrique d'ordre 12
- Matrice des degrés : $D = nI$, avec $n > 2$ et I , matrice identité d'ordre 12.

2.1.3.4. Remarque concernant la symétrie géométrique

L'invariance qui associe à chaque distance intervallique, une distance géométrique, est une condition qui concerne le modèle géométrique. Ce chapitre traitant de la recherche d'un graphe, cette condition sera prise en compte au chapitre 2.4. Lors de la recherche du graphe, nous tenterons d'établir une équivalence entre distance intervallique, et distance sur le graphe.

2.1.4. Décomposition en éléments simples

Rechercher les éléments simples qui composeront notre graphe revient à considérer le graphe comme un produit de plusieurs sous-graphes. Nous utiliserons le produit cartésien, noté \square . Cet opérateur est détaillé au paragraphe 2.1.6.1.

2.1.4.1. De la symétrie des éléments simples

Le modèle étant symétrique⁴⁹, ses éléments simples seront aussi symétriques. Cela exclut les graphes autres que de type K_n et C_n : graphes complets et cycles.

En effet : un graphe complet, reliant tous ses points entre eux, est forcément symétrique. Un graphe cycle est symétrique par rapport à la rotation, il peut se représenter sous la forme d'un polygone régulier.

Ces graphes sont circulants (voir paragraphe 2.1.2.7), leur combinaison se fera par produit cartésien (paragraphe 2.1.6.1). Ce produit est un graphe métacirculant (voir chapitre 2.2.2).

⁴⁹ Symétrique dans notre contexte signifie "invariant par rapport à la transposition" (voir chapitre 2.1.1.2).

2.1.4.2. Recherche de toutes les combinaisons possibles d'éléments simples

Nous allons chercher toutes les façons d'obtenir le nombre 12 en le décomposant en nombres premiers, ces nombres seront ensuite les ordres possibles des graphes élémentaires utilisés pour la construction de notre G_{12} .

La décomposition en nombres premiers de 12 est $12 = 2 \times 3 \times 3$, les facteurs composant 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12.

Nous avons comme paramètres de construction des graphes :

- la forme C_n ou K_n ;
- l'ordre 1, 2, 4, 6 ou 12.

Ce qui, en combinant ces deux paramètres, nous donne les seuls graphes suivants comme éléments simples possibles :

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_{12}, K_1, K_2, K_3, K_4, K_6$, et K_{12} .

2.1.4.3. Exclusion de la solution $G_1 \square G_{12}$

La combinaison de $G_1 \square G_{12}$ revient à considérer simplement les graphes C_{12} et K_{12} .

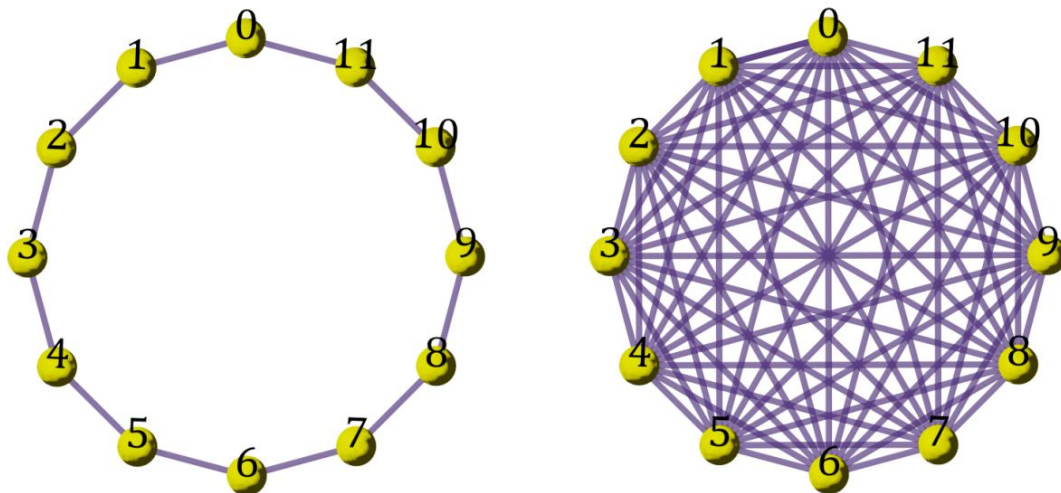


Figure 2-6 : Les graphes C_{12} et K_{12}

C_{12} est le graphe cycle d'ordre 12, ses sommets sont de degré 2 seulement, il ne satisfait pas à la condition requérant un ordre des sommets d'au moins 3.

K_{12} est le graphe complet d'ordre 12, cela revient à relier toutes les notes entre elles ou à autoriser tous les déplacements. Les sommets sont d'ordre 12, ce qui ne satisfait pas aux conditions de départ. Nous excluons donc les graphes C_{12} et K_{12} . Le graphe C_{12} peut correspondre selon l'interprétation au cercle chromatique ou au cercle des quarts, voir chapitre 2.2.1.

La figure 2-6, ci-dessus montre à gauche une représentation du graphe C_{12} et, à droite, une représentation du graphe K_{12} .

2.1.4.4. Choix de l'élément simple à 2 sommets

Tous les éléments simples ne seront pas retenus pour des raisons de non-respect de nos conditions aux limites, de non-sens ou de redondance.



Figure 2-7 : Les graphes C_2 et K_2

Les graphes cycles et complets à deux sommets sont C_2 et K_2 , voir figure 2-7 ci-dessus. Par définition il passe un cercle par tous les points d'un graphe cycle, le graphe C_2 possède ainsi une liaison double. Le graphe complet K_2 ne contient qu'une liaison simple. La liaison double de C_2 n'apportant aucune information pertinente supplémentaire par rapport à K_2 , et ayant éliminé au départ les graphes pondérés, nous ne retiendrons que l'élément K_2 ⁵⁰.

2.1.4.5. Choix de l'élément simple à 3 sommets

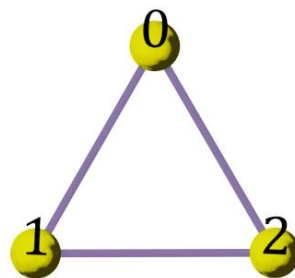


Figure 2-8 : Le graphe triangle


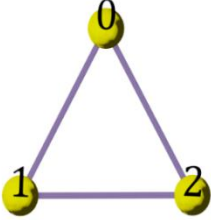
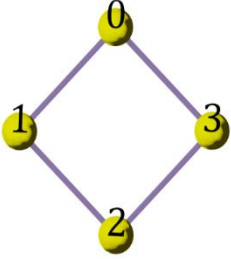
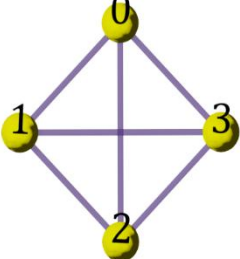
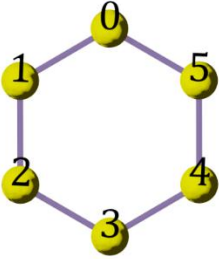
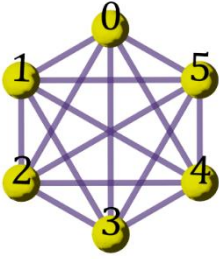
Les graphes à trois sommets, C_3 et K_3 sont deux façons différentes de décrire le même objet : le graphe cycle à 3 points est aussi le graphe complet reliant chacun des 3 points, il s'appelle aussi graphe triangle, voir figure 2-8. Nous choisissons par convention la notation C_3 et n'avons plus besoin de K_3 .

2.1.4.6. Graphes élémentaires retenus

Parmi les combinaisons de graphes cycles et complets, à 2, 3, 4 ou 6 sommets, après avoir choisi les éléments à 2 et 3 sommets, nous ne retenons plus que les graphes suivants : K_2 , C_3 , C_4 , K_4 , C_6 et K_6 . Le modèle recherché sera ainsi une combinaison de ces éléments telle que l'ordre de ce graphe soit 12 et que le degré de ses sommets soit au moins 3.

⁵⁰ Le graphe K_2 est isomorphe au graphe P_2 : graphe "chemin" à deux sommets.

Tableau 2-1 : Les éléments simples retenus pour la construction du graphe

 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Graphe K_2</p>	 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Graphe C_3</p>
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Graphe C_4</p>	 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Graphe K_4</p>
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Graphe C_6</p>	 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>Graphe K_6</p>

Le tableau 2-1 ci-dessus présente les éléments simples retenus pour la construction du graphe recherché.

Les éléments simples retenus sont K_2, C_3, C_4, K_4, C_6 et K_6 .

2.1.5. Significations des éléments simples pour la musique

Avec le mode de représentation habituel des 12 notes le long d'un cercle, il n'y a que quatre répartitions symétriques possibles : par demi-ton ascendant, par demi-ton descendant, par quarte ou par quinte. Ceci s'explique aisément de la manière suivante : afin de parcourir chacune des 12 notes une fois et une seule avec un intervalle constant, nous ajoutons

toujours le même nombre de demi-tons et regardons le résultat. Avec un demi-ton, nous avons : *do, do[♯], ré, mi^b, mi, fa, fa[♯], sol, sol[♯], la, si^b, si, do* ; en utilisant la quarte, nous obtenons : *do, fa, si^b, mi^b, la^b, ré^b, fa[♯], si, mi, la, ré, sol, do*. Ces deux générations fonctionnent. Si nous utilisons un intervalle de quatre demi-tons, nous obtenons : *do, ré, mi, fa[♯], sol[♯], si^b, do* ; ce qui n'engendre pas l'ensemble des douze notes. Les seuls intervalles engendrant l'ensemble des douze notes sont les demi-tons, la quarte et la quinte.

Nous allons montrer ici l'influence de la répartition originelle des notes le long du cercle sur la construction des éléments simples.

2.1.5.1. Le groupe cyclique

De façon plus formelle, considérons l'ensemble des 12 notes comme le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} . Les générateurs de \mathbb{Z}_{12} étant 1, 5, 7 et 11, pour parcourir l'ensemble des 12 notes, il faut un pas de 1, 5, 7 ou 11. Ces pas correspondent aux intervalles décrits plus haut.

Bien que sa formalisation mathématique puisse troubler, le principe de groupe cyclique et les calculs qui y sont associés se pratiquent couramment en musique. C'est la "transposition de tête" : lire une partition et la jouer dans une tonalité différente. Dans ce cas, le musicien ajoute en direct un intervalle à la note lue, c'est une addition dans \mathbb{Z}_{12} . Le musicien de culture latine chante dans sa tête "*do ré mi*", et transpose la phrase musicale en changeant automatiquement les noms des notes, celui qui n'utilise pas ou ne connaît pas les noms possède aussi un système de représentation par intervalles ou par motifs lorsqu'il transpose. Les additions dans le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} sont aussi connues implicitement par tous. En effet, dans la vie quotidienne, nous utilisons le principe d'un groupe cyclique lorsque nous calculons les heures d'une journée. Par exemple, s'il est 10h00, dans 4h il sera 02h00. La figure 2-9 suivante illustre les opérations (dans \mathbb{Z}_{12}) $10 - 8 = 2$; $10 + 4 = 2$ et $10 + 16 = 2$.

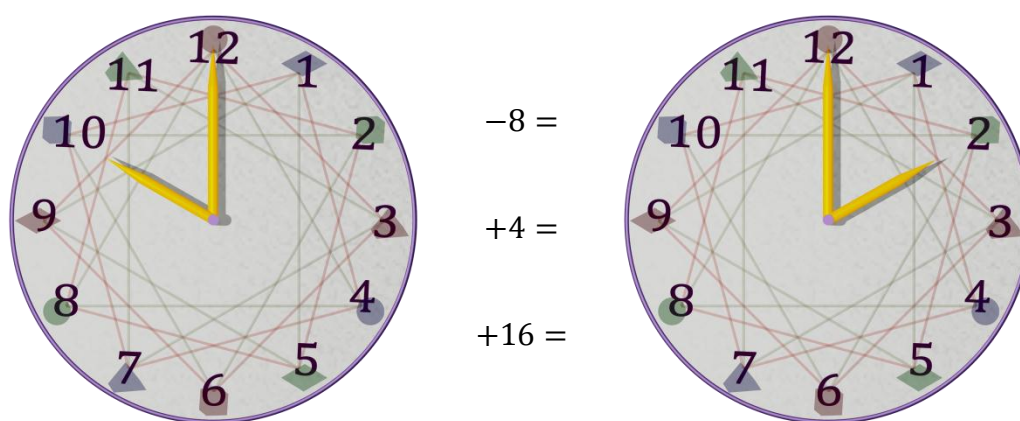


Figure 2-9 : Un exemple de calcul cyclique familier dans \mathbb{Z}_{12}

Le même principe s'applique pour les calculs dans \mathbb{Z}_{24} , cas où l'on compte sur 24 heures.

2.1.5.2. Les graphes à 2 sommets

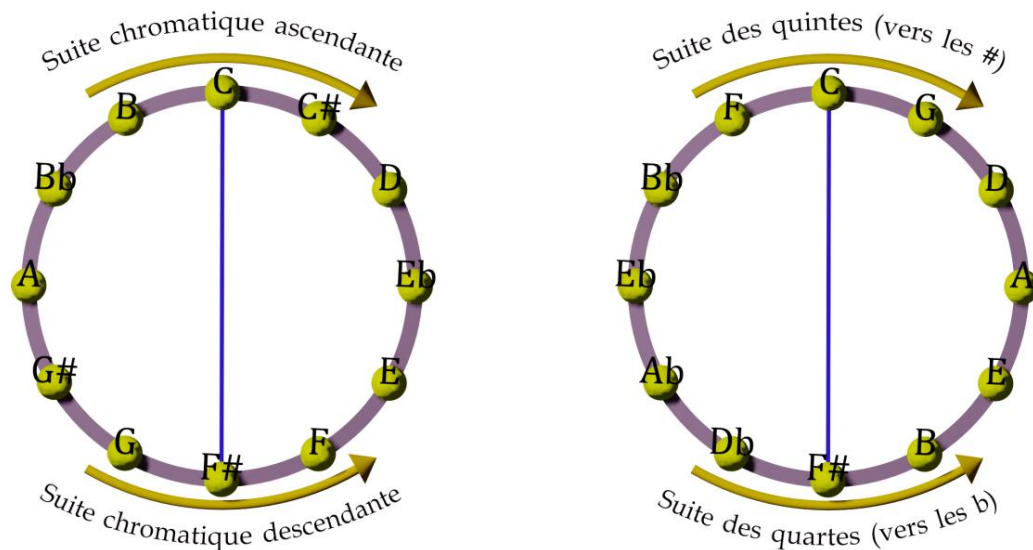


Figure 2-10 : Les graphes à 2 sommets passant par do

Lorsque la division de l'octave se fait par deux, les graphes à 2 sommets lient toujours les deux tritons. Cette liaison ne dépend pas de l'assignation originale des notes le long du cercle, voir figure 2-10 ci-dessus. Que la répartition le long du graphe de départ se fasse de façon chromatique ou par quinte, les tritons, correspondant à l'intervalle le plus grand dans \mathbb{Z}_{12} , sont toujours opposés. La portée suivante (figure 2-11) montre les 6 tritons, en tenant compte de l'enharmoine, à l'intérieur de l'octave $do_3 - do_4$.



Figure 2-11 : Les six tritons correspondant à la division de l'octave par 2

Si les sommets du graphe sont considérés comme des tonalités, ce sont les tons les plus éloignés : leur armature diffère de 6 altérations. Si ce sont des notes, le triton correspond au plus grand intervalle possible à l'intérieur d'une octave.

2.1.5.3. Graphes à 3 et 4 sommets

Les graphes à 3 et 4 sommets symbolisant tout deux des suites de tierces, nous les regroupons naturellement dans ce paragraphe. La figure 2-12 ci-dessous montre les divisions de l'octave par 3 et par 4 pour les deux générations possibles de \mathbb{Z}_{12} .

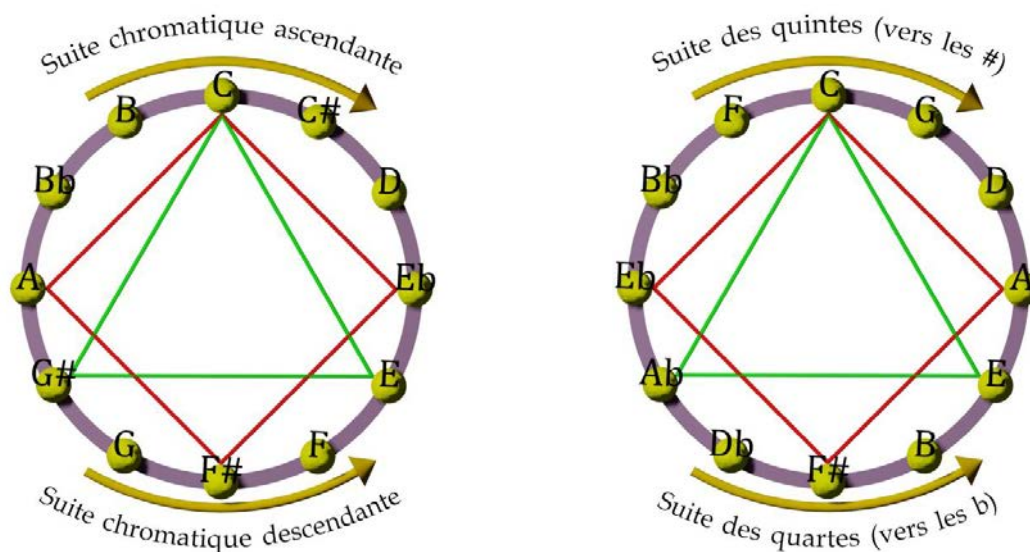


Figure 2-12 : Les graphes à 3 et 4 sommets passant par *do*

Nous constatons que les graphes à 3 et 4 sommets passent toujours par les mêmes notes, que les douze notes soient réparties le long d'un cercle par quatre ou chromatiquement. Ici le graphe C_3 contenant *do*, inclut toujours *mi* et *sol*[#]; le C_4 passant par *do* contient toujours *mi*^b, *fa*[#] et *la*. La division de l'octave par trois correspond à une tierce majeure (2,5 tons), dans notre exemple : *do-mi*. La division de l'octave par quatre correspond à la tierce mineure (2 Tons), ici *do-mi*^b.

Nous remarquons aussi qu'en considérant les sommets de ces graphes comme des notes simples, les points de C_3 forment un accord de quinte augmentée (noté $+$) et les éléments d'un C_4 (ou d'un K_4) sont les notes d'un accord diminué (noté $^\circ$). Ceci est établi de façon similaire par Guerino Mazzola (Mazzola, 2002) et Thomas Noll (Noll, 2001). Les portées ci-dessous (figure 2-13 et figure 2-14) représentent les tierces majeures et mineures, en utilisant l'enharmonie et l'octave réduite à l'intervalle do_3 - do_4 .



Figure 2-13 : Les quatre groupes de tierces majeures



Figure 2-14 : Les trois groupes de tierces mineures

2.1.5.4. Graphes à 6 sommets

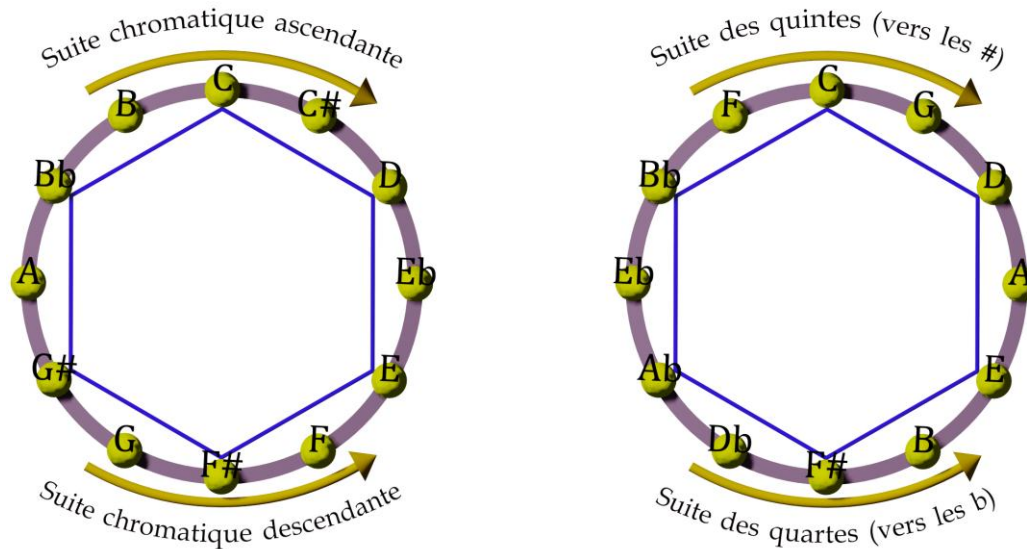


Figure 2-15 : Les graphes à 6 sommets passant par do

Lorsque la division de l'octave se fait par six, les graphes à 6 sommets C_6 , passent par les mêmes notes, quelle que soit la répartition originelle des 12 classes de hauteurs (demi-ton ou quarte). La division de l'octave par 6 correspond au ton. Le graphe C_6 fait alors état des liaisons entre notes distantes d'un ton : passer de *do* à *si^b* ou de *do* à *ré*. Le graphe complet K_6 , montre des chemins entre n'importe quelles notes de la même gamme par ton. Dans une gamme par ton, les notes sont espacées d'un ton, voir figure 2-15 ci-dessus. Les deux gammes par ton sont représentées sur la portée suivante (figure 2-16).





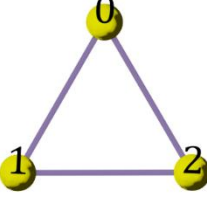

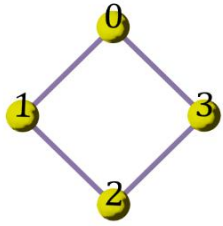

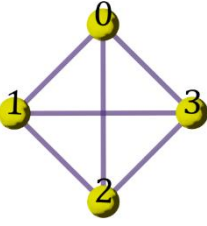

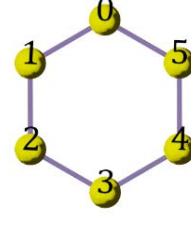

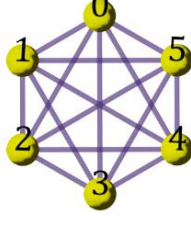

Figure 2-16 : Les deux gammes par ton

2.1.5.5. Tableau de correspondance

Le tableau suivant (tableau 2-2) récapitule la signification des graphes élémentaires retenus.

Dans la colonne de droite, *do* est matérialisé par la superposition de do_3 et do_4 en gris ; ses voisins sont dessinés en noir. Étant dans un espace de classes de hauteurs, nous utilisons toujours l'enharmonie et ne tenons pas compte de renversements, les portées contiennent l'octave do_3 - do_4 .

Tableau 2-2 : Les graphes élémentaires retenus

Graphe élémentaire	Voisins de do (0)		Intervalles		Partition
	Nom	N°	Nom	Valeur	
 K_2	<i>fa[#]</i>	6	triton (4 ^{te} aug)	3 tons	
 C_3	<i>mi, sol[#]</i>	4, 8	3 ^{ce} maj	2 tons	
 C_4	<i>mi^b, la</i>	3, 9	3 ^{ce} min	3/2 tons	
 K_4	<i>mi^b, fa[#], la</i>	3, 6, 9	3 ^{ce} min, triton	2 tons, 3 tons	
 C_6	<i>ré, si^b</i>	2, 10	2 ^{nde} maj	1 ton	
 K_6	<i>ré, mi, fa[#], sol[#], si^b</i>	2, 4, 6, 8, 10	2 ^{nde} maj, 3 ^{ce} maj, triton	1, 2 ou 3 tons	

2.1.5.6. Conclusion concernant la répartition des notes

Les graphes à 2, 3, 4 et 6 sommets correspondent respectivement à une découpe de l'octave par triton, tierce majeure, tierce mineure et ton. Que les notes soient placées par quintes ou chromatiquement le long du cercle original, les graphes éléments simples passent toujours par les mêmes sommets. Nous choisissons alors la répartition chromatique, ce qui correspond à la notation de la *Set Theory*.

Le choix d'une répartition originelle chromatique ou par quintes ne change pas le contenu des graphes élémentaires.

2.1.6. Graphes à 12 sommets, produits d'éléments simples

2.1.6.1. Composition du graphe

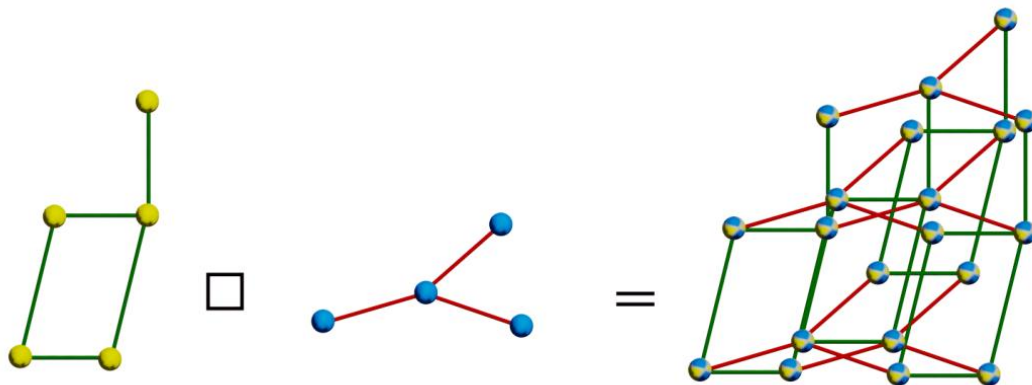


Figure 2-17 : Une illustration graphique du produit cartésien de deux graphes

Pour la construction du graphe, nous utilisons le produit cartésien des graphes élémentaires, il se formule ainsi :

Soit un graphe $G(V, E)$ avec V , l'ensemble des sommets de G et E , l'ensemble de ses arêtes. Le produit cartésien des graphes $G(V, E)$ et $G'(V', E')$, noté $H = G \square G'$, se définit comme suit :

- $V(H) = \{(ss') \mid s \in V, s' \in V'\}$, c'est à dire $V(H) = V(G) \times V(G')$
- $E(H) = \{e_{uu'-vv'} \mid (u = v) \text{ si } d(u', v') = 1 \text{ ou } (u' = v') \text{ si } d(u, v) = 1\}$

Autrement dit l'ensemble des sommets de H est le produit cartésien des sommets de G et de G' , le produit d'un graphe à n sommets et d'un graphe à m sommets contiendra $n \times m$ sommets.

Deux sommets sont voisins si les sommets dont ils sont originaires étaient voisins dans l'un des deux graphes. La figure 2-17 ci-dessus illustre un exemple de produit cartésien de graphe⁵¹.

Nous utilisons le produit cartésien $H = G \square G'$, car il est

- sommet-transitif si et seulement si G et G' sont sommet-transitifs⁵² ;
- connexe si et seulement si G et G' sont connexes⁵³.

Le graphe recherché doit être connexe et circulant (donc sommet-transitif).

2.1.6.2. Décompositions possibles

Construire un graphe d'ordre 12 composé d'éléments simples revient à factoriser 12, autrement dit à trouver toutes les combinaisons possibles dont le produit donne 12. Nous distinguons les produits de 2 nombres (3×4 et 2×6) des produits de 3 nombres ($2 \times 2 \times 3$).

Les décompositions possibles en deux éléments simples sont :

- $K_2 \square C_6, C_6 \square K_2, K_2 \square K_6, K_6 \square K_2, C_3 \square C_4, C_4 \square C_3, C_3 \square K_4$ et $K_4 \square C_3$.

Les décompositions possibles en trois éléments simples sont :

- $K_2 \square K_2 \square C_3, K_2 \square C_3 \square K_2$ et $C_3 \square K_2 \square K_2$.

Le produit cartésien est commutatif et associatif⁵⁴.

Ces deux propriétés permettent de réduire le nombre des constructions possibles. Les décompositions en trois éléments sont toutes égales à $C_3 \square K_4$:

$$K_2 \square K_2 \square C_3 = K_2 \square C_3 \square K_2 = C_3 \square K_2 \square K_2 = C_3 \square K_4.$$

Les décompositions à deux éléments sont égales deux à deux. Nous choisissons arbitrairement une seule forme parmi les commutations possibles en ordonnant les termes du produit de façon croissante : $G_n \square G_m$, avec n et m tels que $n < m$.

2.1.6.3. Graphes retenus

Il ne reste enfin que quatre décompositions possibles pour notre modèle :

$K_2 \square C_6, K_2 \square K_6, C_3 \square C_4$ et $C_3 \square K_4$, représentées dans le tableau 2-3 suivant.

⁵¹ Le produit cartésien d'un graphe se symbolise par le signe \square qui rappelle intuitivement que le produit de deux graphes segment (K_2) est un graphe carré : $K_2 \square K_2 = C_4$. Il se note rarement par le symbole de la multiplication " \times ". Nous utilisons la notation moderne généralement admise " \square ". Pour les détails du produit cartésien de graphes, voir (Imrich, Klavžar, & Gorenec, 2000).

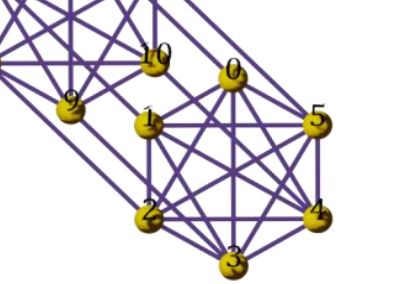
⁵² Dans un graphe sommet-transitif, tous les sommets jouent exactement le même rôle.

⁵³ Dans un graphe connexe il existe un chemin entre tout couple de sommets.

⁵⁴ Nous connaissons la commutativité dans la vie courante par exemple : $2 \times 3 = 3 \times 2$. En termes de graphes, nous avons $G \square H = H \square G$. L'associativité, c'est par exemple $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$. Pour le produit cartésien utilisé, elle devient $F \square (G \square H) = (F \square G) \square H$, avec F, G et H , trois graphes. Voir (Sabadussi, 1959).

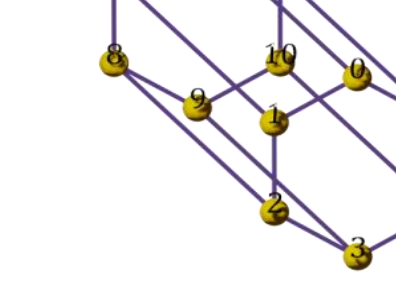
Tableau 2-3 : Les décompositions possibles de l'espace des hauteurs.

$K_2 \square K_6$



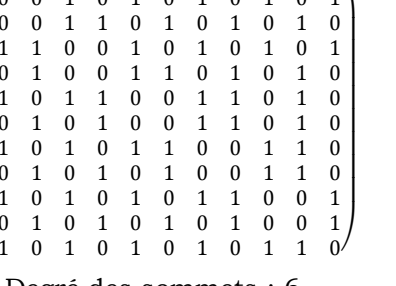
Degré des sommets : 6

$K_2 \square C_6$



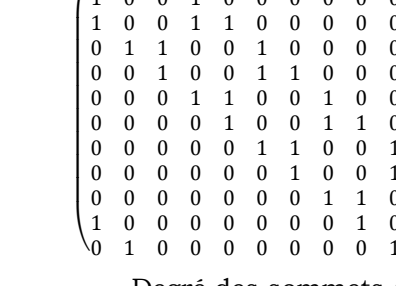
Degré des sommets : 3

$C_3 \square C_4$



Degré des sommets : 4

$C_3 \square K_4$



Degré des sommets : 5

Pour chacun des graphes construits, nous présentons une représentation graphique, sa matrice des degrés des sommets ainsi que sa matrice d'adjacence.

Les combinaisons d'éléments simples sont réduites à :

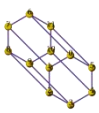

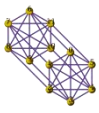

$K_2 \square C_6$, $K_2 \square K_6$, $C_3 \square C_4$ et $C_3 \square K_4$.

2.1.6.4. La famille $G_2 \square G_6$

Les graphes $K_2 \square C_6$ et $K_2 \square K_6$ ne sont pas circulants⁵⁵, ils seront donc exclus. En effet, afin de répartir les douze notes de façon symétrique le long d'un graphe $G_2 \square G_6$, il convient de placer les deux gammes par ton le long de chacun des G_6 . Ensuite, la liaison symbolisée par le C_2 , se fera entre deux notes appartenant à chaque gamme par ton. La seule liaison circulante étant le triton et celui-ci étant déjà présent dans le C_6 il n'y a par conséquent pas de solution circulante. La famille des graphes $G_2 \square G_6$ sera exclue car elle ne répond pas à la règle de l'invariance face à la transposition.

Le tableau 2-4 suivant montre la signification des graphes construits à partir des éléments à deux et six sommets.




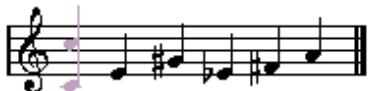
Tableau 2-4 : Exemples de graphes construits avec $G_2 \square G_6$

Graphe construit	Voisins de <i>do</i> (0)		Intervalle	Représentation
	Nom	N°	Valeur	
$K_2 \square C_6$ 	<i>do</i> [#] (ou <i>si</i>) <i>ré</i> et <i>si</i> ^b .	1 (ou 11), 2 et 10.	+1/2 ton (ou -1/2 ton), +/- 1 ton.	
$K_2 \square K_6$ 	<i>do</i> [#] (ou <i>si</i>) <i>ré</i> , <i>mi</i> , <i>fa</i> [#] , <i>sol</i> [#] et <i>si</i> ^b .	1 (ou 11), 2, 4, 6, 8 et 10.	+ 1/2 ton (ou -1/2 ton), +/- 1 ton, +/- 2 tons, 3 tons.	

⁵⁵ Le produit cartésien de deux graphes circulants est toujours métacirculant (Sanders, 2002).

2.1.6.5. La famille $G_3 \square G_4$

Tableau 2-5 : Exemples de graphes construits avec $G_3 \square G_4$

Graphe construit	Voisins de <i>do</i> (O)		Intervalles	Représentation
	Nom	N°	Valeur	
$C_3 \square C_4$ 	<i>mi^b</i> , <i>mi</i> , <i>sol[#]</i> et <i>la</i>	3,4,8 et 9	+/- 3/2 tons +/- 2 tons	
$C_3 \square K_4$ 	<i>mi^b</i> , <i>mi</i> , <i>fa[#]</i> <i>sol[#]</i> et <i>la</i>	3,4,6,8 et 9	+/- 3/2 tons +/- 2 tons 3 tons	

Les produits des graphes $C_3 \square C_4$ et $C_3 \square K_4$, sont des graphes circulants et symétriques. Ils répondent aux conditions spécifiées. Le tableau 2-5 ci-dessus montre la signification de ces graphes.

En musique, nous interprétons ces graphes de la façon suivante :

- $C_3 \square C_4$: liaison vers la tierce majeure ou mineure, montante ou descendante ;
- $C_3 \square K_4$: liaison vers la tierce majeure ou mineure, montante ou descendante et liaison vers le triton.

Si les nœuds du graphe sont considérés comme des notes, le graphe C_3 correspond à un accord de *quinte augmentée*, nommé plus couramment accord augmenté et le graphe C_4 , à un accord de *septième diminuée*, *quinte diminuée*, habituellement appelé accord diminué.

L'accord de *la augmenté* se note A^+ ou A^{aug} , l'accord de *la diminué* s'écrit A^0 , A^{dim} ou A^{-b5} selon le contexte. Nous utilisons les notations habituelles en Jazz : A^+ et A^0 .

2.1.6.6. Conclusion : le graphe correspondant est $C_3 \square C_4$

Les graphes $C_3 \square C_4$ et $C_3 \square K_4$ respectent bien la première partie de la symétrie qui est : "Invariance par rapport à la transposition : le modèle n'a pas de note privilégiée". Mais $C_3 \square K_4$ ne respecte pas la seconde partie de la symétrie qui demande d'associer une même distance à chaque intervalle musical équivalent⁵⁶. Nous aurions pu éliminer plus tôt dans cette étude le graphe élémentaire K_4 car cette condition n'était pas respectée dès le départ. Nous l'avons laissé à dessein, car le graphe et les modulations

⁵⁶ Même s'il n'est pas encore question ici du modèle géométrique (nous considérons ici la distance en termes de graphe), le graphe $C_3 \square K_4$ propose la même distance (1) pour un triton et pour une tierce qui ne sont pas perçus de façon similaire. Le graphe $C_3 \square K_4$ ne sera donc pas retenu.

proposées sont remarquables : la liaison entre une note et son triton est le plus grand écart possible dans un espace de hauteurs cyclique ; dans certains styles comme le Jazz ou le Blues, un accord peut être substitué à son triton. Notons qu'il faudra deux pas sur le graphe, avec notre modèle pour passer au triton.

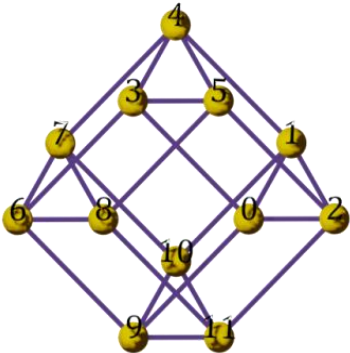
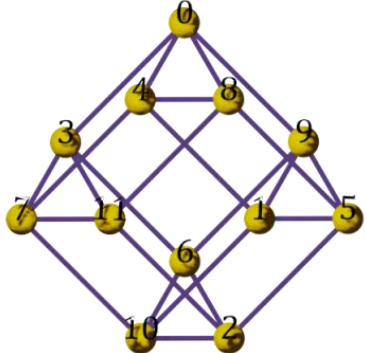
Concernant les similitudes désirées entre distance intervallique et distance sur le graphe, nous voyons que $C_3 \square C_4$ est composé de tierces mineures et de tierces majeures qui sont physiquement proches, mais pas égales (1.5 vs 2 tons). Cela peut se compenser avec un facteur d'échelle lors de la représentation géométrique, la fonction musicale d'une tierce majeure ou mineure étant toutefois analogue.

Le graphe satisfaisant aux conditions de départ est $C_3 \square C_4$.

2.1.7. Choix d'un isomorphe : le *Graphe Planet*

Le graphe produit $C_3 \square C_4$ remplit les conditions demandées, l'illustration suivante (tableau 2-6) montre à gauche l'ordre des sommets proposé par défaut par *Mathematica*TM. Telle qu'elle est organisée, la matrice n'apparaît pas circulante. Le logiciel construit d'abord le graphe comme produit puis assigne un numéro à chaque sommet. Il convient d'ordonner les nœuds ou de rétablir l'ordre souhaité afin d'obtenir la notation usuelle : (do=0, etc.). Nous choisissons un isomorphe que nous construisons par sa matrice d'adjacence.

Tableau 2-6 : Construction et étiquetage du graphe $C_3 \square C_4$

Construction directe par <i>Mathematica</i> TM	Construction par la matrice d'adjacence
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

L'isomorphe de $C_3 \square C_4$ choisi est baptisé *Graphe Planet*. Il est construit depuis sa matrice d'adjacence en liant les notes (disposées le long d'un cercle par demi-tons) par tierces majeures et par tierces mineures. Nous le choisissons comme modèle sous l'apparence de la figure 2-18 suivante.

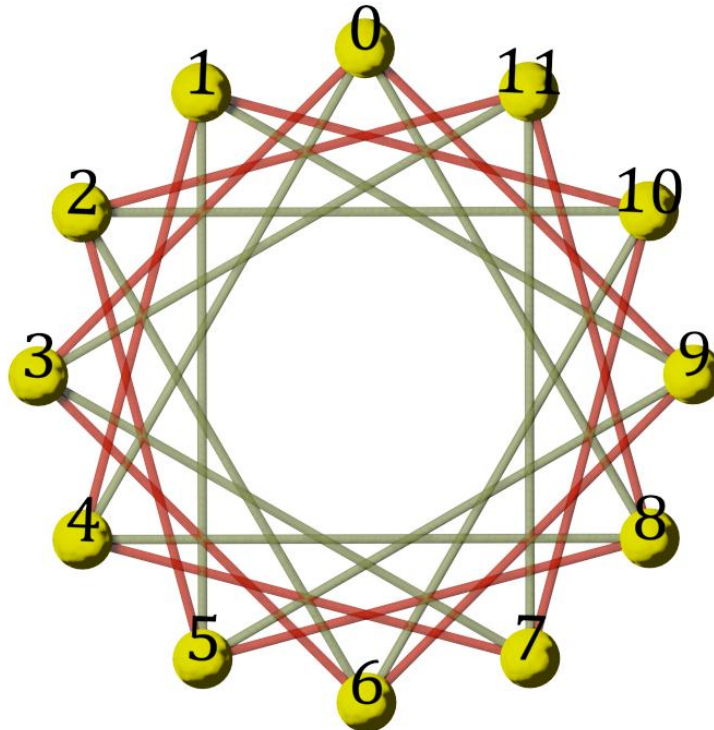


Figure 2-18 : L'apparence choisie pour le *Graphe Planet*

En disposant les points de cette façon, l'analogie avec les douze notes triées par ordre croissant est simplement plus évidente. Nous pouvons établir la correspondance standard de l'espace des hauteurs suivante : $do=0$, $do^\sharp=1$, ..., $si=11$.

Nous définissons *Graphe Planet* comme le graphe de Cayley sur \mathbb{Z}_{12} , avec le voisinage de zéro généré par $(\pm 3, \pm 4)$.

Voir chapitre 2.2.2 pour la caractérisation du *Graphe Planet*.

2.1.8. Coloration du graphe

Nous considérons la couleur en terme de graphe comme un nombre complexe : $z = a + ib$ avec $a \in \{0,1,2,3\}$ et $b \in \{0,1,2\}$. Les termes a et b identifient l'appartenance aux C_3 et C_4 respectifs. Nous obtenons ainsi $a \times b$, soit douze combinaisons uniques pour z . En ce qui concerne la représentation graphique du graphe, nous associons à chaque nœud du graphe un idéogramme à deux paramètres : forme et couleur⁵⁷.

⁵⁷ Voir le chapitre consacré à la construction du modèle géométrique (2.2.7) et celui décrivant le système idéographique (2.4.5).

Forme et couleur sont associées respectivement aux termes a et b de la coloration. La figure 2-19 suivante montre les différents symboles associés à z représentés dans le plan complexe.

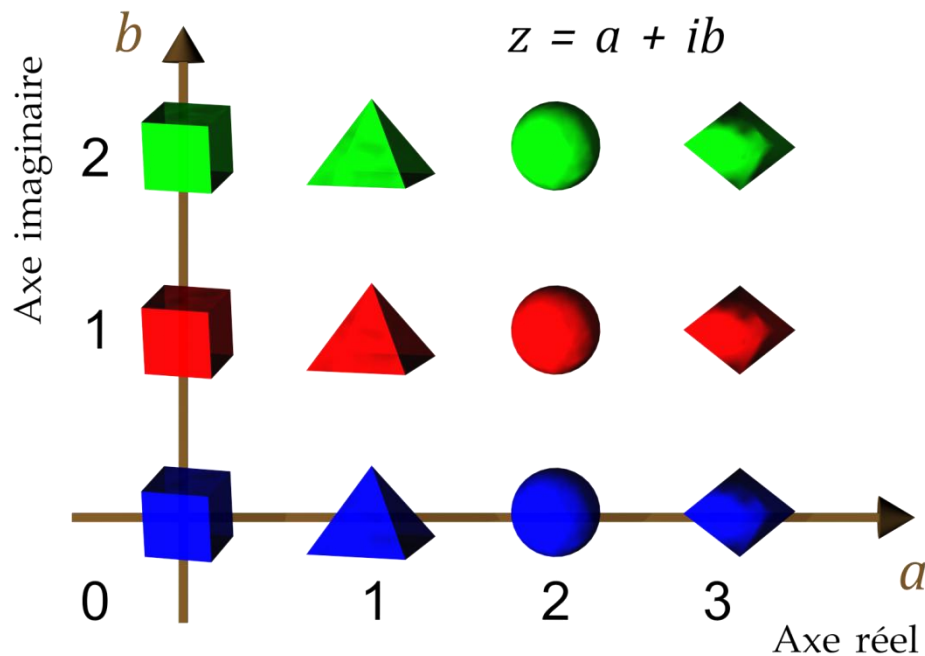


Figure 2-19 : La coloration par nombres complexes utilisée

Nous vérifions que ce système idéographique respecte les critères d'un langage exposés au chapitre 1.2.3.

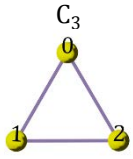

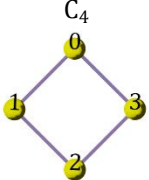

2.2. ETUDE DU *GRAPHE PLANET*

Nous détaillons ici la constitution du *Graphe Planet*, ses propriétés en termes de graphe, puis réaliserons son étude spectrale en vue de construire un modèle géométrique.

2.2.1. Éléments constitutifs du *Graphe Planet*

Nous partons du *Graphe Planet* et détaillons les éléments de sa construction. Étant constitué des graphes élémentaires C_3 et C_4 , nous en rappelons dans le tableau 2-7 suivant, les significations musicales.

Tableau 2-7 : Signification des graphes élémentaires constitutifs

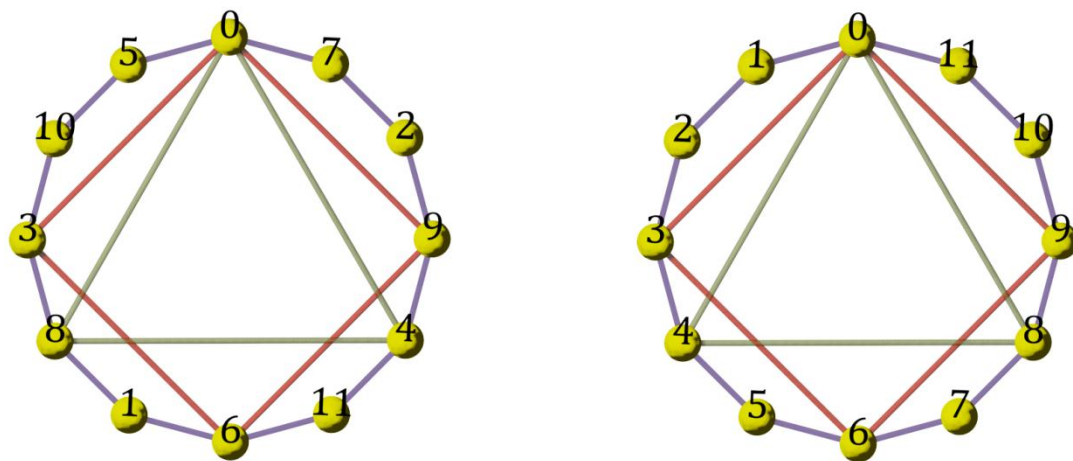
Graphe élémentaire	Voisins de <i>do</i> / <i>C</i> / 0			Intervalle musical		Partition
	Latin	Int.	N°	Nom	Valeur	
	<i>mi</i> , <i>sol</i> [#]	<i>E</i> , <i>G</i> [#]	4, 8	tierce majeure	2 tons	
	<i>mi</i> ^b , <i>la</i>	<i>E</i> ^b , <i>A</i>	3, 9	tierce mineure	3/2 tons	

Le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} possède deux générateurs qui sont 1 et 5. Quel que soit ce générateur, l'assignation des classes de hauteurs aux nœuds du graphe est la même. Voir figure 2-20 ci-dessous. Pour la musique, générer \mathbb{Z}_{12} par 1 correspond au cercle chromatique où chaque note est distante de sa voisine d'1/2 ton. Lorsque \mathbb{Z}_{12} est engendré par 5, la position des notes représente le cercle des quartes (ou des quintes⁵⁸ s'il est parcouru dans l'autre direction).

- Si nous considérons les sommets comme des tonalités (majeures ou mineures), chaque voisin diffère de l'autre d'une altération à la clef. Ce sont des tonalités voisines au sens musical du terme⁵⁹.
- En interprétant les nœuds du graphe comme des accords dans un cadre tonal, il y a une attraction naturelle de la quinte vers la tonique. Par exemple du point 7 vers le point 0.

⁵⁸ En considérant les sommets du graphe comme des notes arrangées par quintes, le rapport de fréquence entre deux notes voisines est, pour notre système à tempérament égal, de $2^{7/12}$. C'est l'approximation de la quinte exacte qui est de 3/2.

⁵⁹ Par exemple, l'armature de *ré majeur* possède deux dièses, celle de son voisin, *la majeur*, en compte trois.

Figure 2-20 : Les deux générations de \mathbb{Z}_{12}

Quelle que soit la génération originelle de \mathbb{Z}_{12} , par cycle des quarts ou chromatique, la distance musicale entre deux nœuds d'un C_3 est une tierce majeure (2 tons), la distance séparant deux voisins d'un C_4 est une tierce mineure ($3/2$ tons). En considérant les nœuds de C_3 comme les notes d'un accord, ils forment un accord augmenté. Les sommets d'un C_4 formant un accord diminué. Ceci est expliqué par Thomas Noll dans "*Geometry of Chords*" (Noll, 2001).

2.2.2. Propriétés du graphe

2.2.2.1. Les autres appellations du *Graphe Planet*

Le *Graphe Planet* que nous avons trouvé et calculé comme produit de deux graphes cycliques élémentaires $C_3 \square C_4$ à déjà été répertorié dans la littérature et caractérisé selon diverses familles.

Graphe circulant

Il se note $Ci_{12}(3,4)$. C'est un graphe circulant, à 12 sommets, chacun étant relié à son 3^{ème} et 4^{ème} voisin⁶⁰.

Graphe de Cayley

Notre graphe est un graphe de Cayley qui peut se caractériser de la façon suivante. Défini sur un groupe (ici \mathbb{Z}_{12}) et un ensemble de générateurs, puisqu'il est circulant, c'est un graphe de Cayley sur $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, et les voisins de 0 sont $(-4, -3, 3, 4)$ ⁶¹.

⁶⁰ Il peut s'écrire : "12-circulant graph (3,4)" dans Mathematica™.

⁶¹ Comme C_3 et C_4 sont des graphes de Cayley (avec les groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ muni du générateur $\{1, -1\}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ muni de $\{1, -1\}$), leur produit $C_3 \square C_4$ en est un aussi. Ceci avec le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et le générateur $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ (correspondance avec Charles Delorme, Décembre 2008).

Graphe grille torique

Le produit de deux cycles est un graphe appelé "graphe grille torique"⁶².

Graphe faiblement régulier

Un graphe régulier est un graphe où tous les sommets ont le même nombre de voisins. Un graphe fortement régulier est un graphe régulier où chaque paire de sommets adjacents a le même nombre m de voisins en commun et où chaque paire de sommets non adjacents a le même nombre n de voisins en commun. Le graphe de Petersen est un graphe fortement régulier. Un graphe faiblement régulier est un graphe régulier, mais pas fortement.

Notre graphe est faiblement régulier, il est caractérisé comme : "WeaklyRegular {12, 4, {0, 1}, {0, 2}}"⁶³.

Sa caractérisation est établie à l'aide des quatre paramètres suivants :

- 12, le nombre de sommets ;
- 4, le degré des sommets ;
- {0,1}, le nombre de voisins communs possible des sommets adjacents ;
- {0,2}, le nombre de voisins communs possibles pour les sommets non-adjacents.

Selon le troisième paramètre, deux sommets adjacents possèdent un ou zéro voisin commun. La vue de gauche de la figure 2-21 ci-dessous montre que les sommets adjacents d'un même carré n'ont pas de voisin commun (points 0 et 3).

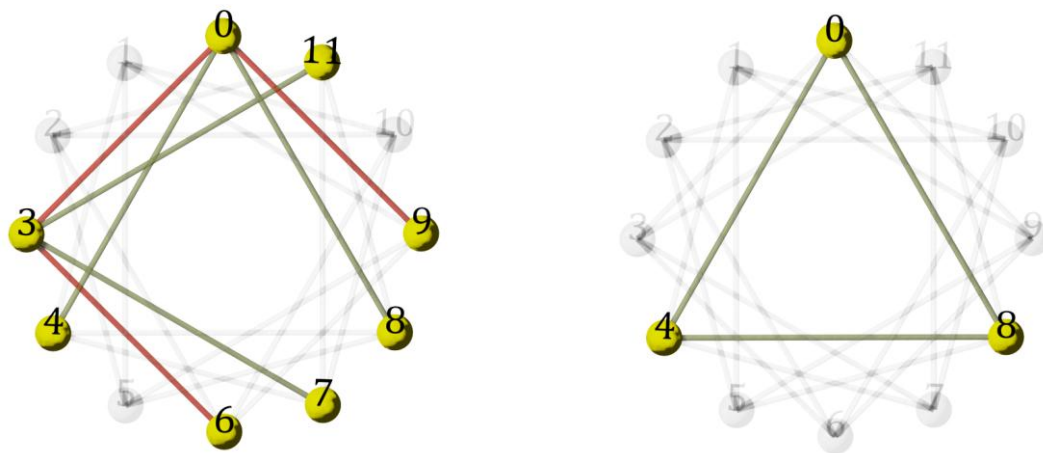


Figure 2-21 : Les voisins communs des sommets adjacents

A droite, nous voyons que les sommets adjacents d'un même triangle ont un seul voisin commun (les points 0 et 4 sont liés au point 8).

Selon le quatrième paramètre, si deux sommets ne sont pas reliés, ils ont zéro ou deux voisins communs. La figure 2-22 ci-dessous montre que

⁶² Le terme anglais est Torus-grid graph ou Torus Grid (Fellows, 1985), p50 ; ou parfois simplement Torus (Chung & Tetali, 1998).

⁶³ Caractérisation avec la syntaxe de Mathematica™.

les sommets non liés viennent soit de deux carrés différents et n'ont pas de voisin commun (tels les points 0 et 5 sur la vue de gauche), ou soit d'un même carré et ont dans ce cas deux voisins communs (comme les points 0 et 6 qui sont liés aux points 3 et 9).

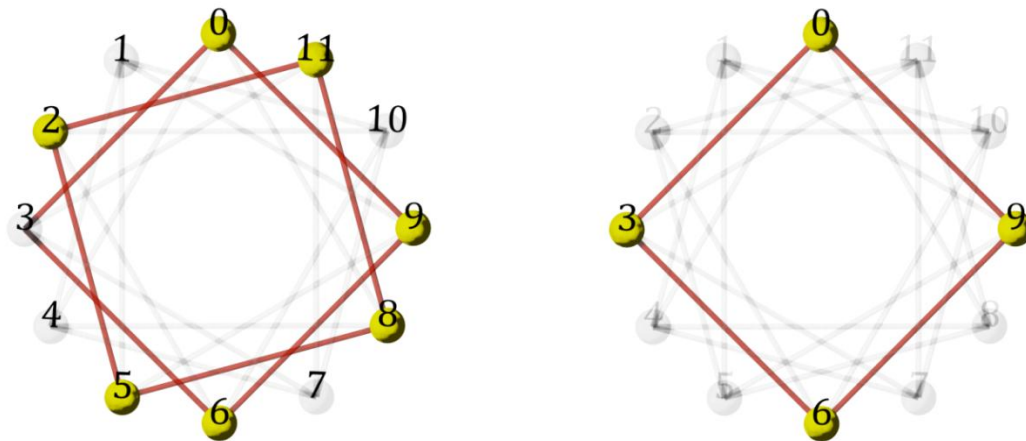


Figure 2-22 : Les voisins communs des sommets non-adjacents

2.2.3. Traduction des propriétés du graphe en termes musicaux

Nous présentons et traduisons de façon musicale, certaines propriétés couramment recherchées pour la caractérisation des graphes.

Graphe métacirculant

Le concept de graphes méta-circulants, introduit par Alspach et Parson (Alspach & Parsons, 1982), est une extension de la notion de graphes circulants. Le *Graphe Planet* étant construit comme produit de graphes circulants, il est méta-circulant (Sanders, 2002). La propriété de circulation d'un graphe représentant des classes de hauteurs ou des accords correspond à une invariance par rapport à la transposition. Nous pouvons traduire maintenant l'idée de méta-circulation par "une combinaison d'invariances par rapport à la transposition". Nous retrouvons en effet les mêmes schémas lorsque nous permutons les notes (par rotation) par tierces majeures ou mineures ou combinaison des deux. Le graphe obtenu en permutant les sommets du *Graphe Planet* le long d'un de ses graphes élémentaires C_3 et C_4 est un isomorphe. Cette propriété s'ajoute à celle de la circulation déjà énoncée.

Les Webs

Les Webs étant une famille de graphes circulants⁶⁴, nous cherchons une correspondance musicale. Par définition⁶⁵, un *Web* W_n^k est un graphe dont les n sommets sont $0, \dots, n-1$, où ij est une arête si i et j diffèrent d'au plus k modulo n , et $i < j$. Au niveau musical, nous générons l'ensemble des classes de hauteurs de façon chromatique, ou par quarts.

Cas chromatique : les sommets du graphe sont numérotés $0, \dots, 11$. Le *Web* W_{12}^2 représente le cercle chromatique ; avec le *Web* W_{12}^3 , nous autorisons des déplacements avec un intervalle de $\frac{1}{2}$ ou 1 ton ; avec W_{12}^4 , les notes distantes de moins de deux tons sont reliées. Nous verrons au chapitre 3.1.1 que le graphe associé au clavier du piano est inclus dans W_{12}^3 , qui correspond au clavier de Janko, et que le clavier de l'accordéon peut se modéliser par W_{12}^4 .

Cas du cercle des quarts : nous générons un graphe C_{12} par quarts ($+5/2$ tons), considérons ses sommets comme des tonalités et ses arêtes comme des possibilités de modulation. Les voisins dans C_{12} sont alors des tonalités voisines⁶⁶. Le degré k du *Web* W_{12}^k peut s'interpréter comme un degré de voisinage. Le *Web* W_{12}^2 représente le cercle des quarts ; avec W_{12}^3 les modulations aux tons voisins et leurs voisins sont autorisées.

Le *Graphe Planet* peut se concevoir comme la différence entre deux Webs : $W_{12}^5 - W_{12}^3$.

Graphe Cop-Win

Avec ce concept introduit par Alain Quilliot (Quilliot, 1983), nous considérons un graphe comme un terrain de jeu où plusieurs participants peuvent se déplacer de sommet en sommet. L'un des joueurs est appelé l'intrus, ou le voleur. Les autres participants (dits policiers) vont essayer de le rejoindre. Dans la variante simple, le voleur se déplace, puis le policier. Chaque joueur connaît la structure du graphe. Si, par construction, l'intrus finit toujours par être pris, le graphe est dit "Cop Win" ou "policier gagnant". Un graphe contenant des cycles de plus de trois points n'a pas cette propriété car le voleur peut tourner indéfiniment sans être rattrapé.

En ce qui concerne une traduction musicale, nous imaginons un jeu où les sommets du graphe sont des accords ou bien des notes, et les arêtes des possibilités de passage. Le graphe définit ainsi des mélodies ou suites d'accords possibles. Un musicien suit un chemin qu'il décide à chaque pas de temps en essayant d'éviter le second qui, pour sa part, cherche l'unisson. Dans un graphe policier-gagnant, l'unisson finira toujours par être atteint. Le *Graphe Planet* n'est pas Cop Win avec un seul policier.

⁶⁴ Nous précisons que le terme "Webs" désigne des "puissances de cycles", cette famille est strictement contenue dans celle des graphes de Cayley sur les groupes cycliques. Ceci afin de ne pas confondre avec le *Webgraph* (graphe en toile d'araignée, non circulant (Koh, Rogers, Teo, & Yap, 1980) ou encore avec un *Webgraph*, terme générique employé lors de l'étude de la structure de l'Internet comme un graphe.

⁶⁵ Dans la définition retenue (Pêcher & Wagler, 2006), les sommets sont numérotés de 1 à n . Par cohérence avec la Set Theory, nous utiliserons les indices de 0 à $n-1$, ce qui ne change rien à la définition.

⁶⁶ Tons voisins au sens actuel du terme, c'est à dire dont les signatures ne diffèrent que d'une altération.

Graphe hamiltonien

Dans un graphe hamiltonien il existe au moins un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois. Ce cycle élémentaire est alors appelé cycle hamiltonien.

Le *Graphe Planet* possède 252 cycles hamiltoniens⁶⁷ dont par exemple $\{0,3,6,2,5,9,1,10,7,11,8,4,0\}$ représenté dans la figure 2-23 ci-dessous.

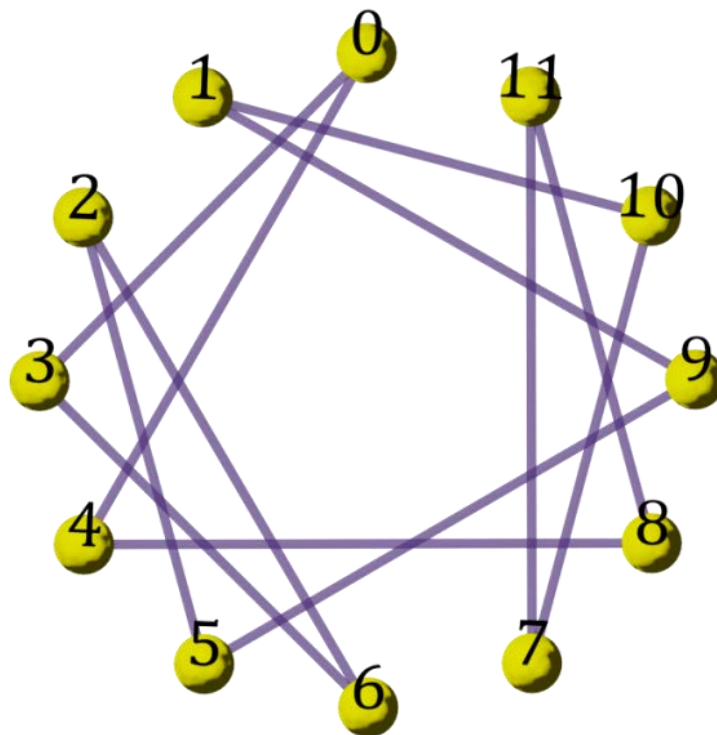


Figure 2-23 : Un chemin hamiltonien dans le *Graphe Planet*

En musique, suivre un cycle hamiltonien, c'est passer par chacun des accords, ou chacune des notes selon le contexte, une seule fois⁶⁸.

⁶⁷ Résultat donné par *Mathematica*™®, la liste est disponible dans le fichier Excel™ joint sur le DVD.

⁶⁸ Concernant le *Graphe Planet*, nous l'avons mis en pratique pour la conception d'entraînement aux gammes (voir chapitre 6.3.2). Voir aussi les chemins hamiltoniens entre accords au chapitre 3.5.4.

Graphe eulérien

Dans un graphe eulérien, il existe au moins un chemin partant d'un sommet, passant par toutes les arêtes une et une seule fois, et revenant au point de départ. En musique c'est un chemin qui utilise tous les intervalles possibles du réseau de notes ou d'accords selon le contexte.

Le *Graphe Planet* possède au moins un cycle eulérien, par exemple :
 $\{0, 3, 11, 2, 10, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 1, 9, 5, 8, 11, 7, 10, 6, 9, 0, 8, 4, 0\}$.

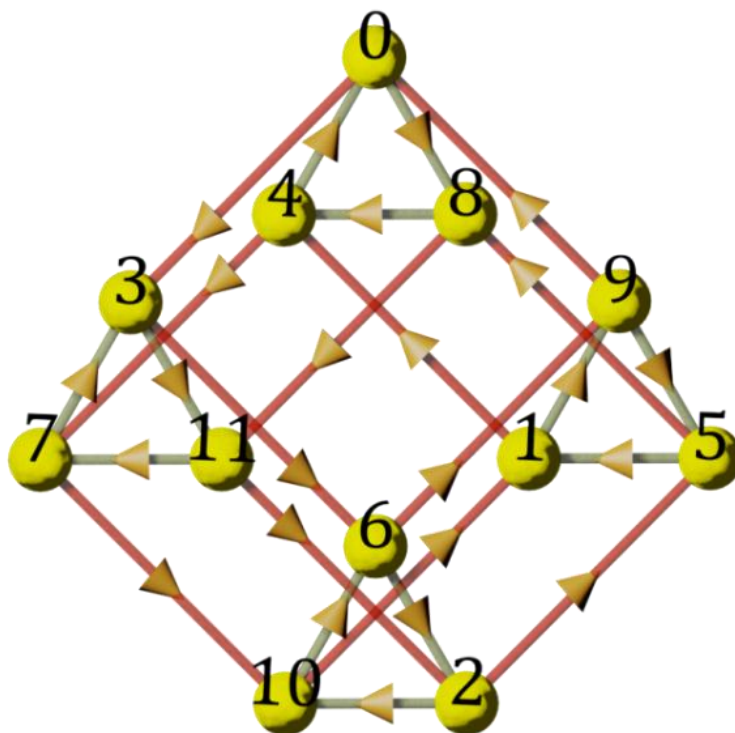


Figure 2-24 : Un cycle eulérien dans le *Graphe Planet*

La figure 2-24 ci-dessus montre un cycle eulérien. Nous représentons le *Graphe Planet* sous cette apparence pour mieux distinguer les flèches.

Le tableau 2-8 suivant établit un parallèle, lorsqu'il a un sens, entre les propriétés habituelles d'un graphe et leur correspondance musicale.

Tableau 2-8 : Correspondance musicale des propriétés générales d'un graphe

Propriété du graphe	Correspondance musicale
Non pondéré	Pas de note privilégiée, chaque sommet a la même importance.
Non dirigé ou non orienté	Les intervalles sont considérés de façon identique dans les deux directions.
Sans boucle	Pas de relation entre la note et elle-même. Nous ne nous intéressons pas à l'intervalle nul ou à l'octave.
Circulant	Invariance à la transposition.
Vertex transitive	Les liaisons sont interchangeables.
Edge transitive	Les sommets sont interchangeables.
Régulier	Chaque note a le même nombre de voisins.
Faiblement régulier	Pas de signification musicale pertinente concernant le voisinage.
Quartique	Chaque note a 4 voisins.
Diamètre égal à 3	Il faudra un maximum de 3 étapes pour passer d'un sommet à un autre.
Hamiltonien	Nous pouvons utiliser un cycle passant une fois et une seule par chacun des sommets.
252 cycles hamiltoniens	Il y a 252 chemins différents passant par chaque note.
Eulérien	Il existe au moins un chemin où nous pouvons parcourir chaque arête une fois et une seule.
Web	Les sommets liés sont les plus proches en termes d'intervalle ou de voisinage musical.
Cop Win	Quel que soit un chemin non déterminé, une autre ligne mélodique pourra arriver à l'unisson.
Sans griffe	Pas d'éléments à trois voisins.
Connexe	Il n'y a pas de note isolée.
Non biparti	Il n'y a pas de sous-groupe isolé.
Méta-circulant	Combinaison de transpositions. Voir supra.

2.2.4. Calcul du spectre

La première étude du spectre du *Graphe Planet* fut effectuée de façon intégralement numérique avec le logiciel *Mathematica*TM. Au vu de la symétrie et de la régularité du modèle, celui-ci mérite d'être caractérisé par des valeurs exactes. Nous avons ainsi effectué les calculs de façon littérale, les résultats numériques servant de vérification. Le graphe étant circulant, nous pouvons utiliser cette propriété particulière afin de calculer son spectre de façon exacte.

2.2.4.1. Détermination des valeurs propres

Le *Graphe Planet* possède douze sommets, il est circulant et peut être défini par le voisinage du point 0, noté $V(0) = \{3, 4, 8, 9\}$. Comme la matrice d'adjacence est circulante, ses valeurs propres sont de la forme

$$\lambda_j = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^k, \text{ avec } \omega_j = e^{i \frac{2j\pi}{12}}, \text{ les douze racines de l'unité (Lara, 2001).}$$

Comme j varie de 0 à 11, il y aura 12 valeurs propres que nous ordonnerons par valeur absolue décroissante. Le voisinage de 0 est représenté par k , qui prendra les valeurs 4, -4, 3, et -3 dans la formule ci-dessus. Prenons comme exemple simple le calcul de la première valeur propre. Dans ce cas, le terme ω_j^0 vaut 1. La somme pour quatre voisins vaut alors $1+1+1+1 = 4$. Cela s'écrit

$$\lambda_0 = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^0 = 4.$$

De façon générale, nous remplaçons le terme k dans la formule $\lambda_j = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^k$, par chacune de ses valeurs possibles : les voisins de zéro. Comme il s'agit d'une somme, l'ordre du calcul est indifférent.

La formule devient :

$$\lambda_j = \omega_j^{-4} + \omega_j^{-3} + \omega_j^3 + \omega_j^4$$

Elle se traduit sous forme de nombre complexe par

$$\lambda_j = e^{2i \frac{\pi}{12} * 8j} + e^{2i \frac{\pi}{12} * 9j} + e^{2i \frac{\pi}{12} * 3j} + e^{2i \frac{\pi}{12} * 4j}, \text{ soit}$$

$$\lambda_j = e^{i \frac{4\pi}{3} * j} + e^{i \frac{3\pi}{2} * j} + e^{i \frac{\pi}{2} * j} + e^{i \frac{2\pi}{3} * j}.$$

Le développement du calcul est le suivant:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \cos\left(\frac{4j\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{3j\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{2j\pi}{3}\right) \\ &\quad + i \left(\sin\left(\frac{4j\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{3j\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2j\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 2 * \cos(j\pi) \cos\left(-\frac{j\pi}{2}\right) + 2 * \cos(j\pi) \cos\left(-\frac{j\pi}{3}\right) \\ &\quad + 2i \left(\sin(j\pi) \cos\left(-\frac{j\pi}{2}\right) \right) + 2i \left(\sin(j\pi) \cos\left(-\frac{j\pi}{3}\right) \right). \end{aligned}$$

Eliminons les termes nuls : $\sin(j\pi)$, et utilisons $\cos(a)=\cos(-a)$, il reste :

$$\lambda_j = 2 \cos(j\pi) \left(\cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{j\pi}{3}\right) \right) = 2 \cos(j\pi) \left(2 \cos\left(\frac{\frac{j\pi}{2} + \frac{j\pi}{3}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{j\pi}{2} - \frac{j\pi}{3}}{2}\right) \right).$$

Nous obtenons enfin la formule suivante :

$$\lambda_j = 4 \cos(j\pi) \cos\left(\frac{5j\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{12}\right).$$

En remplaçant pour j les valeurs de 0 à 11, nous trouvons les valeurs propres suivantes :

$$\{ 4, -1, -3, 2, 1, -1, 0, -1, 1, 2, -3, -1 \}.$$

En tenant compte de la multiplicité des valeurs propres, le spectre s'écrit

$$S = \{ 4^1, -3^2, 2^2, 1^2, -1^4, 0^1 \}.$$

En négligeant la multiplicité, celui-ci s'écrit :

$$S = \{ 4, -3, 2, 1, -1, 0 \}.$$

2.2.4.2. Utilisation de la propriété du produit cartésien

Le calcul précédent s'appuie sur la propriété générale de circulation du graphe. Il sera réutilisé pour d'autres cas généraux de graphes circulants. Le *Graphe Planet* étant le produit cartésien de deux graphes, son spectre est une combinaison des deux graphes de départ.

Le spectre d'un produit cartésien $H = G \square G'$, est $\{\lambda_j \times \lambda'_j\}$, avec $\{\lambda_j\}$, le spectre de G et $\{\lambda'_j\}$, le spectre de G' .

Le spectre de H est la somme de toutes les paires possibles⁶⁹.

Le spectre d'un graphe cycle est

$$\lambda_j = 2 \cos\left(\frac{2j\pi}{n}\right), \text{ avec } j \text{ variant de } 0 \text{ à } n - 1^{70}.$$

Dans notre cas, le spectre du *Graphe Planet* est la combinaison de toutes les paires possibles parmi les valeurs propres du spectre de C_3 , soit $\{2, -1, -1\}$ et celles du spectre de C_4 , soit $\{2, 0, -2, 0\}$.

La combinaison donne

$$\begin{aligned} & \{2, -1, -1\} \times \{2, 0, -2, 0\} = \\ & \{2 + 2, 2 + 0, 2 - 2, 2 + 0, -1 + 2, -1 + 0, -1 - 2, -1 + 0, -1 + 2, -1 + 0, -1 - 2, -1 + 0\} \\ & = \{4, 2, 0, 2, 1, -1, -3, -1, 1, -1, -3, -1\}. \end{aligned}$$

Le spectre est bien

$$S = \{ 4^1, -3^2, 2^2, 1^2, -1^4, 0^1 \}.$$

⁶⁹ Le calcul est repris de (Cvetkovic et al., 1980).

⁷⁰ Spectre de graphe particulier issu de (Chung, 1997), p. 6.

2.2.4.3. Calcul des vecteurs propres

Les vecteurs propres d'une matrice circulante d'ordre n sont toujours les mêmes. C'est la multiplicité des valeurs propres qui fait apparaître tel ou tel sous-espace propre⁷¹.

Dans notre cas, où la matrice est d'ordre douze, les vecteurs propres sont calculés par la formule suivante :

$$V_j = (\omega_j^1, \omega_j^2, \dots, \omega_j^{12}), \text{ pour } j \text{ variant de } 0 \text{ à } 11, \\ \text{avec} \\ \omega_j = e^{i \frac{2j\pi}{12}} : \text{ les douze racines douzièmes de l'unité.}$$

2.2.4.4. Décomposition spectrale du laplacien normalisé

Nous étudions ici la décomposition spectrale du laplacien normalisé, telle que décrite par F.K. Chung (Chung, 1997). Soit A , la matrice d'adjacence du graphe G , P la matrice contenant ses vecteurs propres, Δ , la matrice diagonale contenant les valeurs propres, et D , la matrice des degrés.

La matrice des degrés ne comporte que des valeurs sur sa diagonale. Ses coefficients sont les degrés des sommets. Comme nous sommes en présence d'un graphe circulant, l'ordre de chaque sommet étant 4, la matrice D ne contient que des 1 sur sa diagonale. Elle se définit formellement par

$$D_{i,j} = 4 \text{ si } i = j, \text{ et} \\ D_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Le laplacien est représenté par la matrice $L = D - A$. C'est la différence entre la matrice des degrés et la matrice d'adjacence. Nous n'utilisons pas directement le laplacien, mais sa version normalisée L qui est calculée de la façon suivante :

$$L = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}.$$

Le graphe étant quartique⁷², la matrice des degrés ne contient que des valeurs 4 sur sa diagonale. Nous avons

$$L = I - \frac{1}{4}A = P \left(I - \frac{1}{4} \Delta \right) P',$$

avec $\left(I - \frac{1}{4} \Delta \right)$, la matrice diagonale des valeurs propres α_i du laplacien normalisé L .

Les valeurs propres α_j du laplacien normalisé sont ainsi déduites de celles (λ_j) de la matrice d'adjacence par la formule :

$$\alpha_j = 1 - \frac{\lambda_j}{4}.$$

⁷¹ Pour les généralités concernant les matrices circulantes, voir (Lara, 2001).

⁷² Tous les sommets ont quatre voisins.

La multiplicité des valeurs propres est bien sûr la même, nous déduisons simplement l'ensemble des valeurs propres S_1 de l'ensemble S ainsi pour chaque j ,

$$\alpha_j = 1 - \frac{\lambda_j}{4} = 1 - (4 \cos(j\pi) \cos\left(\frac{5j\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{12}\right))/4.$$

D'où

$$\alpha_j = 1 - \left(\cos(j\pi) \cos\left(\frac{5j\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{12}\right) \right).$$

L'ensemble des valeurs propres du laplacien normalisé est le suivant :

$$S_1 = \left\{ 0, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4} \right\}.$$

Il s'écrit sous la forme :

$$S_1 = \left\{ \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0 \right\},$$

ou encore, en tenant compte de la multiplicité :

$$S_1 = \left\{ \frac{7^2}{4}, \frac{5^4}{4}, 1^2, \frac{3^2}{4}, \frac{1^2}{2}, 0^1 \right\}.$$

Cet ensemble contenant six éléments, le spectre contiendra six sous-espaces propres. La dimension de chaque espace propre est indiquée dans le tableau suivant (tableau 2-9).

2.2.4.5. Table récapitulative du spectre du laplacien normalisé

Le tableau ci-dessous détaille le spectre du laplacien normalisé du *Graphe Planet*. Chaque sous-espace propre est associé à une valeur propre, sa multiplicité donne la dimension de cet espace.

Tableau 2-9 : Décomposition spectrale initiale du *Graphe Planet*

Sous-espace propre	Valeur propre	Multiplicité	Vecteurs propres
E_0	$7/4$	2	$V_2 \left(1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{2i\frac{\pi}{3}}, \dots, e^{11i\frac{\pi}{3}}\right);$ $V_{10} \left(1, e^{i\frac{5\pi}{3}}, e^{2i\frac{5\pi}{3}}, \dots, e^{11i\frac{5\pi}{3}}\right).$
E_1	$5/4$	4	$V_1 \left(1, e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{2i\frac{\pi}{6}}, \dots, e^{11i\frac{\pi}{6}}\right);$ $V_{11} \left(1, e^{i\frac{11\pi}{6}}, e^{2i\frac{11\pi}{6}}, \dots, e^{11i\frac{11\pi}{6}}\right);$ $V_5 \left(1, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{2i\frac{5\pi}{6}}, \dots, e^{11i\frac{5\pi}{6}}\right);$ $V_7 \left(1, e^{i\frac{7\pi}{6}}, e^{2i\frac{7\pi}{6}}, \dots, e^{11i\frac{7\pi}{6}}\right).$
E_2	1	1	$V_6 \left(1, e^{i\pi}, e^{2i\pi}, \dots, e^{11i\pi}\right).$
E_3	$3/4$	2	$V_4 \left(1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{2i\frac{2\pi}{3}}, \dots, e^{11i\frac{2\pi}{3}}\right);$ $V_8 \left(1, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{2i\frac{4\pi}{3}}, \dots, e^{11i\frac{4\pi}{3}}\right).$
E_4	$1/2$	2	$V_3 \left(1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{2i\frac{\pi}{2}}, \dots, e^{11i\frac{\pi}{2}}\right);$ $V_9 \left(1, e^{i\frac{3\pi}{2}}, e^{2i\frac{3\pi}{2}}, \dots, e^{11i\frac{3\pi}{2}}\right).$
E_5	0	1	$V_0(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1).$

2.2.4.6. Changement de bases

Nous remarquons que chaque sous-espace propre est généré par une ou deux paires de vecteurs de la forme (V_j, V_{12-j}) . Afin d'éviter les parties imaginaires pour ces espaces, nous opérons une substitution de la base originale (V_j, V_{12-j}) par (W_j, W_{12-j}) telle que :

$$(W_j, W_{12-j}) = ((V_j + V_{12-j}), \frac{1}{i}(V_j - V_{12-j})) \text{ pour chaque } j \in (1,5),$$

les coordonnées des vecteurs W_j et W_{12-j} sont :

$$W_{j,k} = 2 \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right) \text{ et } W_{(12-j),k} = 2 \sin\left(\frac{jk\pi}{6}\right), \text{ pour } k \text{ variant de } 0 \text{ à } 11.$$

Par construction, la norme euclidienne de chaque vecteur est de 24 :

$$\|W_{j,k}\|^2 = \|W_{(12-j),k}\|^2 = 24, \text{ pour } j \text{ variant de } 1 \text{ à } 5.$$

Afin de normaliser les vecteurs, nous appliquons un facteur d'échelle de $1/24$, ainsi les vecteurs normalisés auront les coordonnées suivantes :

$$W_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right) \text{ et } W_{12-j,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{jk\pi}{6}\right),$$

pour k variant de 0 à 11 et j variant de 1 à 5.

Concernant les valeurs de j (0 et 6) qui ne sont pas associées par paires, nous avons alors:

$$W_{0,k} = \frac{1}{\sqrt{12}} \text{ et } W_{6,k} = \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{12}}.$$

2.2.4.7. Sous-espaces propres retenus

Nous obtenons, suite aux substitutions de bases décrites précédemment, les espaces propres suivants :

E_0 formé de V_2 et V_{10} sera désormais généré par

$$W_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) \text{ et } W_{10,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{10k\pi}{6}\right).$$

Le principe étant similaire pour les autres sous-espaces, les calculs ne seront pas détaillés. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant (tableau 2-10).

Tableau 2-10 : Décomposition spectrale finale du *Graphe Planet*

Sous-espace propre	Valeur propre	Vecteurs propres réels et normalisés
E_0	$7/4$	$W_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right); W_{10,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right).$
E_1	$5/4$	$W_{1,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right); W_{11,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right);$ $W_{5,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{5k\pi}{6}\right); W_{7,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{7k\pi}{6}\right).$
E_2	1	$W_6 = \frac{1}{\sqrt{12}} (1, -1, 1, \dots, -1).$
E_3	$3/4$	$W_{4,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right); W_{8,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right).$
E_4	$1/2$	$W_{3,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right); W_{9,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$
E_5	0	$W_0 = \frac{1}{\sqrt{12}} (1, 1, 1, \dots, 1).$

2.2.5. Etude des espaces propres

Nous étudions ici, chacun des sous-espaces propres et en donnons la signification dans un cadre appliqué à la musique.

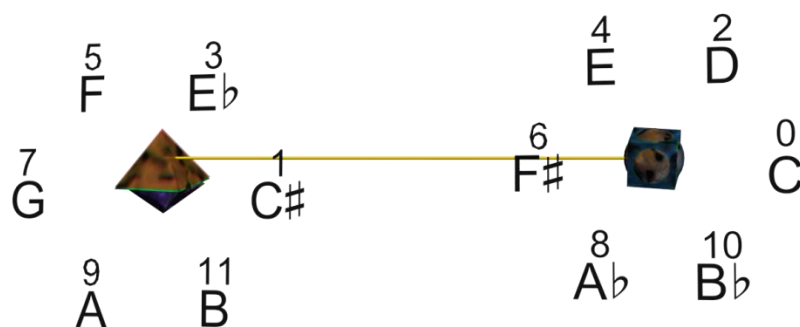
2.2.5.1. Espaces triviaux

L'espace $E_5, \alpha_5 = 0$ est trivial : tous les points sont confondus. Cette projection n'apporte rien, la valeur propre zéro est toujours présente pour le laplacien normalisé.

Dans le cas de l'espace E_2 associé à la valeur propre unique 1, la projection fait apparaître deux groupes de points distincts :

Nous pouvons y voir deux ensembles correspondant aux nombres pairs et aux nombres impairs ou, musicalement, deux ensembles contenant chacun l'une des deux gammes par ton. Ceci, quelle que soit la génération originale de \mathbb{Z}_{12} .

Au point de coordonnée 1, sont confondues toutes les notes de la gamme par ton contenant *do*. Toutes les valeurs de la seconde gamme par ton ont pour coordonnée -1.

Figure 2-25 : Projection du Graphe Planet dans E_2

Sur la figure 2-25 ci-dessus, nous indiquons les noms des sommets par leur numéro dans la *Set Theory*, et aussi par une lettre indiquant le nom de la note. Cette projection unidimensionnelle, ne comporte que deux valeurs différentes, elle ne permet pas de distinguer les douze notes.

2.2.5.2. Espaces à deux dimensions

Les sous-espaces propres à deux dimensions font apparaître de façon très intuitive des formes géométriques auxquelles nous donnerons une signification musicale.

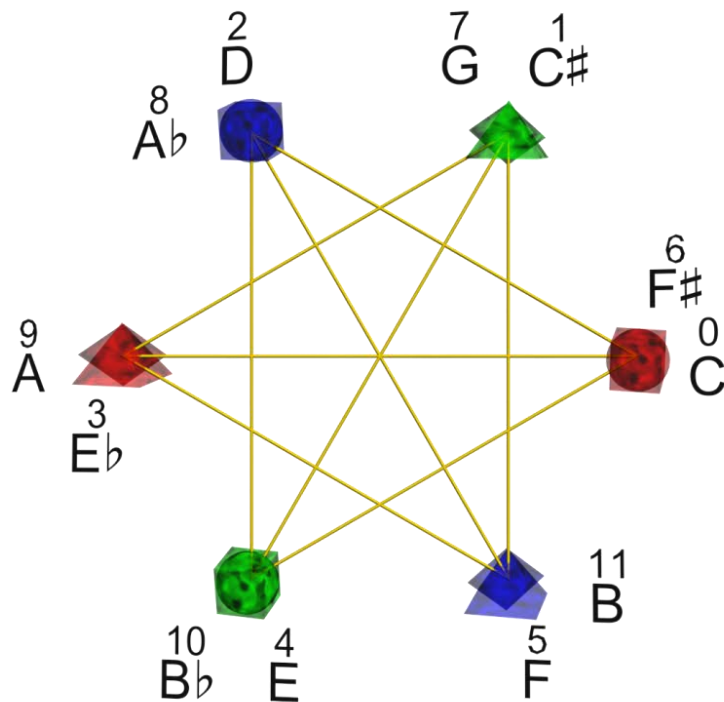
Espace E_0 , de dimension 2

Associé à la valeur propre $\frac{7}{4}$, sa base vectorielle est constituée de :

$$W_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) \text{ et de } W_{10,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right), \text{ pour } k \text{ variant de } 0 \text{ à } 11.$$

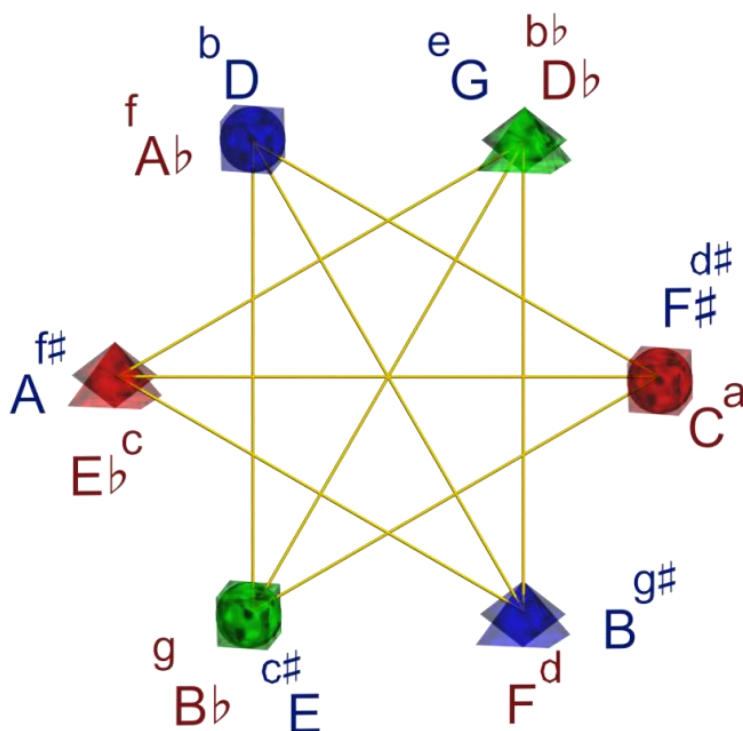
Les coordonnées des sommets projetés dans ce sous-espace seront les suivantes:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Figure 2-26 : Projection du *Graphe Planet* dans E_0

Cet espace laisse apparaître de façon évidente deux hexagones superposés (voir ci-dessus, figure 2-26). En chaque point de cette projection sont réunis deux symboles représentant les nœuds du graphe, les points groupés deux à deux sont les tritons. Quelle que soit la génération originale de \mathbb{Z}_{12} (voir chapitres 2.1.5.4 et 2.2.1), nous pouvons parcourir l'hexagone deux fois en choisissant un intervalle constant : un demi-ton ou une quinte.

Si les sommets sont des notes, les deux hexagones superposés peuvent être interprétés comme deux demi-gammes (notes de 0 à 5 et notes de 6 à 11). Si les sommets sont des tonalités majeures, nous pouvons y voir deux groupes de tonalités l'un contenant les "gammes à dièse", l'autre les gammes dites "à bémol". Pour le mode majeur, les "gammes à dièse" sont C, G, D, A, E, B, F#, C# ; les gammes à bémol sont C, F, Bb, Eb, Ab, Db, Gb. (Anger-Weller, 1990).

Figure 2-27 : Les gammes à dièses et les gammes à bémols dans E_0

Cette projection conserve la forme des éléments triangulaires. Ces éléments sont superposés deux par deux. Si les sommets sont des notes, les deux groupes distincts formés de la superposition de deux triangles correspondent aux deux gammes par ton. Voir figure 2-27 ci-dessus.

Les éléments C_4 originaux dans le *Graphe Planet* se voient projetés sous forme de trois segments distincts. Chaque segment montre simultanément les quatre liaisons du graphe de départ : par exemple, les chemins 0-3, 3-6, 6-9 et 9-0 sont superposés.

La projection dans E_0 ne permet pas de distinguer les douze notes.

Espace E_3 , de dimension 2

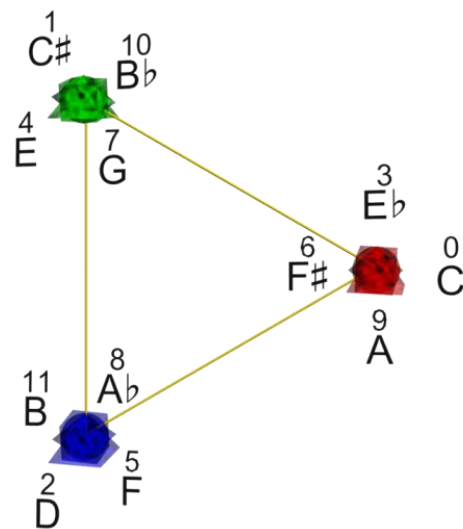
Ce sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{3}{4}$ est engendré par les vecteurs

$$W_{4,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \text{ et } W_{8,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ pour } k \text{ variant de } 0 \text{ à } 11.$$

Nous remarquons immédiatement que les points sont les sommets d'un triangle régulier et sont superposés 4 à 4 modulo 3.

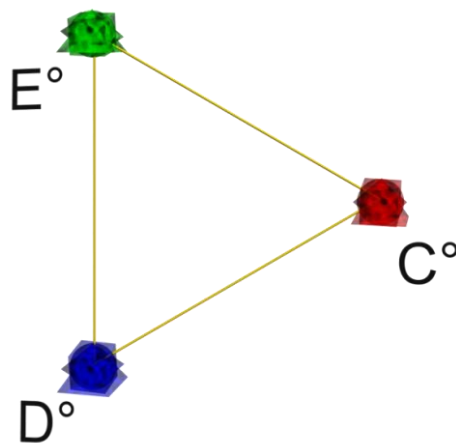
Les coordonnées des points sont :

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Figure 2-28 : Projection du *Graphe Planet* dans E_3

Cette projection fait apparaître clairement les éléments simples C_3 constituant le *Graphe Planet*. Les quatre C_3 se projettent sur un seul triangle régulier, les trois C_4 se confondent chacun en un point distinct, sommet du triangle, voir figure 2-28 ci-dessus.

En considérant les sommets du graphe comme des notes, les douze notes sont réparties en trois groupes de quatre. Chaque ensemble correspond à un des trois accords diminués possibles. Grâce à l'étiquetage à deux dimensions par forme et couleur, nous remarquons instantanément que les sommets du graphe partageant la même couleur sont superposés. Cette projection laisse apparaître les modules "cercle extérieur 3" (Noll, 2001). Si, au lieu de notes ou tonalités, nous affectons aux sommets du *Graphe Planet* des accords diminués, alors chaque point de la projection représente le même accord (voir ci-dessous figure 2-29).

Figure 2-29 : Projection des accords diminués dans E_3

La projection dans E_3 ne distingue pas les douze sommets du graphe.

Espace E_4 , de dimension 2

Associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$, ce sous-espace propre a pour base les vecteurs

$$W_{3,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{ et } W_{9,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \text{ pour } k \text{ variant de } 0 \text{ à } 11.$$

Les coordonnées des points sont alors :

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tous les points sont disposés aux quatre coins d'un carré et sont superposés trois à trois. Le système de coloration utilisé nous montre très rapidement que les douze sommets sont répartis par forme, c'est à dire selon leur appartenance à tel ou tel C_3 .

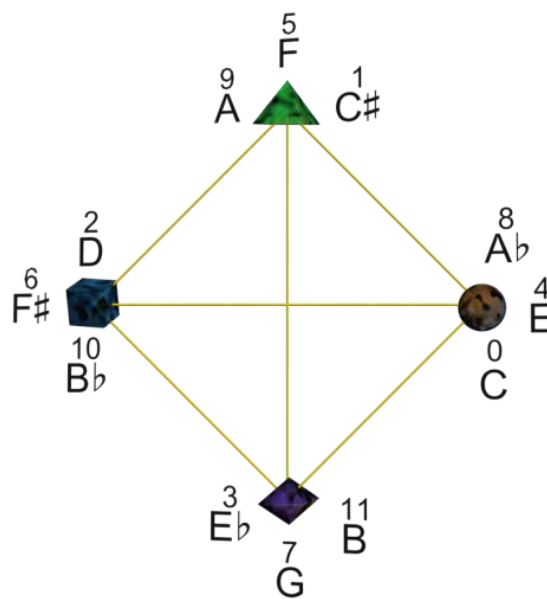
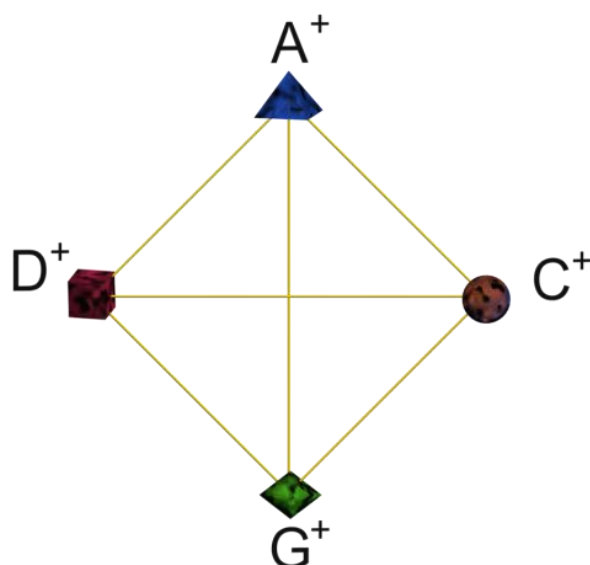


Figure 2-30 : Projection du *Graphe Planet* dans E_4

La projection des éléments constituant le *Graphe Planet* s'opère de la façon suivante : les trois C_4 forment trois carrés superposés, les quatre C_3 se projettent chacun en un point distinct, sommet du carré (voir ci-dessus, figure 2-30). Les notes sont ainsi réparties en quatre ensembles correspondant aux quatre accords augmentés possibles. Cette projection 2D superpose les C_3 et fait apparaître un C_4 , elle montre les modules appelés "cercle extérieur 4" (Noll, 2001). Si les sommets du *Graphe Planet* sont au départ des accords diminués, alors ce sous-espace superpose les accords identiques (voir ci-dessous, figure 2-31).

Figure 2-31 : Projection des accords augmentés dans E_4

La projection dans E_4 ne permet pas de distinguer les douze sommets du graphe.

2.2.5.3. Espace à quatre dimensions

La décomposition spectrale fait apparaître de façon native un espace à quatre dimensions : le sous-espace propre E_1 . Il est engendré par la valeur propre $5/4$. Les quatre vecteurs associés sont (W_1, W_{11}, W_5, W_7) , leurs coordonnées sont respectivement :

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(k \frac{\pi}{6}\right), \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(k \frac{\pi}{6}\right), \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(k \frac{5\pi}{6}\right) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\left(k \frac{5\pi}{6}\right), \text{ pour } k \text{ variant de } 0 \text{ à } 11.$$

Afin de visualiser cet espace à quatre dimensions, nous avons utilisé deux méthodes : par projection du modèle vers trois dimensions avec animation, et par scindement de l'espace 4D en deux sous-espaces 2D dessinés de façon statique.

Visualisation par projection en 3D avec animation

Le modèle a été projeté orthographiquement de 4D vers 3D⁷³. Le résultat est une animation disponible en annexe multimédia (Clip 1 : *Planet Graph E1 4D*, p. 296), nous en proposons ci-dessous une image extraite (figure 2-32).

⁷³ Projection de $Q(re^{i\alpha}, re^{i\theta})$ vers $P(x,y,z)$ tq $x = r \cos(\theta) + r \cos(\alpha)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = r \sin(\alpha)$ voir (Zacharias & Velichova, 2000).

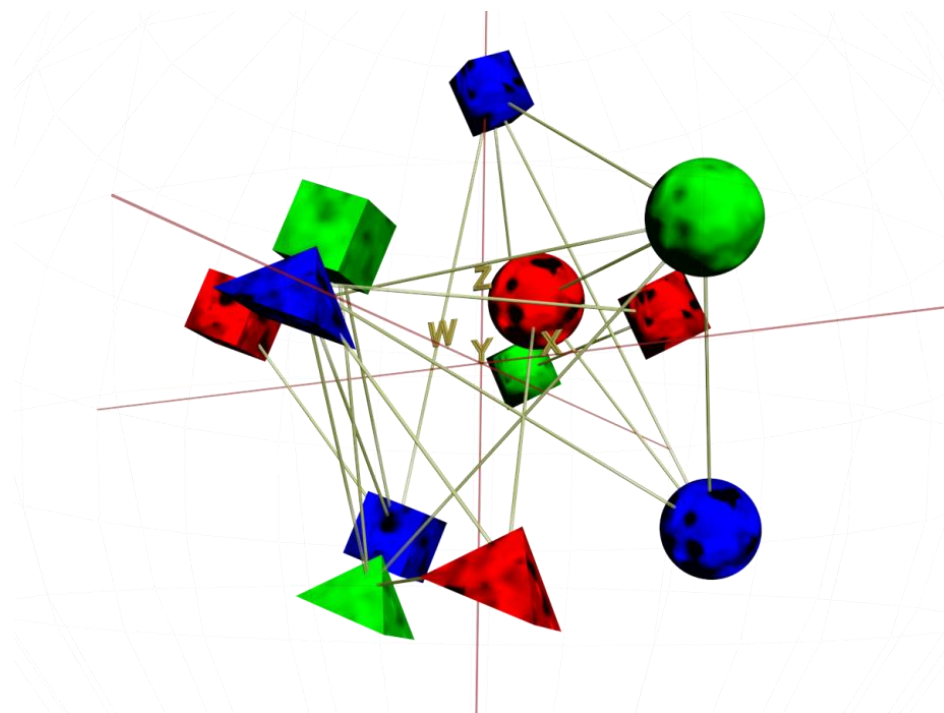


Figure 2-32 : Projection 3D du Graphe Planet dans E_1 extraite de l'animation

Le programme maison générant les animations 4D étant générique, les vecteurs composant E_1 (W_1, W_{11}, W_5, W_7) ont été baptisés (X,Y,Z,W). Cette animation fait apparaître assez difficilement les formes géométriques qui la composent : bien que les triangles soient réguliers et que les quadrilatères soient carrés (voir chapitre 2.2.5.2), leur visualisation est fastidieuse pour un spectateur non entraîné à la quatrième dimension.

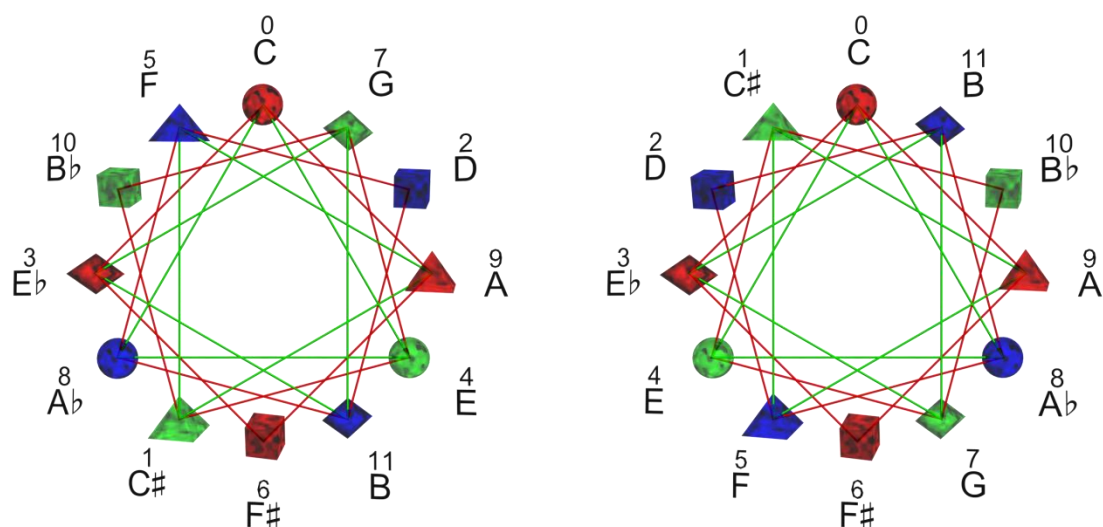
Visualisation par scindement de l'espace

Nous avons ensuite utilisé une technique plus classique, consistant à scinder l'espace 4D en deux sous-espaces 2D⁷⁴. La dissociation s'opère d'autant plus facilement que l'espace E_1 est constitué de deux plans triviaux perpendiculaires (en quatre dimensions s'entend). Nous représentons alors un espace 4D sous forme de vues juxtaposées⁷⁵. Sur la figure 2-33 la vue de gauche représente la partie de E_1 composée par (W_1, W_{11}), la vue de droite montre la partie provenant du couple (W_5, W_7).

Dans chacune de ces vues, les points sont situés le long d'un cercle et forment les sommets d'un dodécagone régulier. La vue de droite correspond à la génération de \mathbb{Z}_{12} par 1 : c'est le cercle chromatique. La vue de gauche, analogue au cercle des quartes illustre une génération de \mathbb{Z}_{12} par 5.

⁷⁴ Cette technique de projection a été utilisée dans un cadre musical par J. Ashley Burgoyne et Lawrence K. Saul afin de représenter, dans un cadre tonal en quatre dimensions, accords et harmonies (Burgoyne & Saul, 2005).

⁷⁵ Une illustration de cette technique présentée par l'équipe de Jos Ley dans le film "Dimensions" (Ley, Ghys, & Alvarez, 2008), est jointe sur le DVD d'accompagnement : Clip O 1 : Dimensions Math, l'hypersphère, p. 269.

Figure 2-33 : Visualisation de E_1 par scindement de l'espace 4D

Sur chacune des vues, nous avons représenté les relations originales du *Graphe Planet* (C_3 et C_4), passant par le point 0. Cet espace à quatre dimensions est fictif et peut se concevoir en imaginant une boule que l'on tiendrait dans sa main et que l'on observerait sous deux angles différents, chaque point de vue montrant deux faces différentes. En l'observant d'un côté, l'hypersphère présente le cercle chromatique et de l'autre, le cercle des quintes. Comme les C_3 et C_4 sont dessinés de façon semblable dans les deux cercles, les vues sont identiques, seules les désignations diffèrent. L'image de synthèse ci-dessous (figure 2-34) est une vision artistique de cet espace.

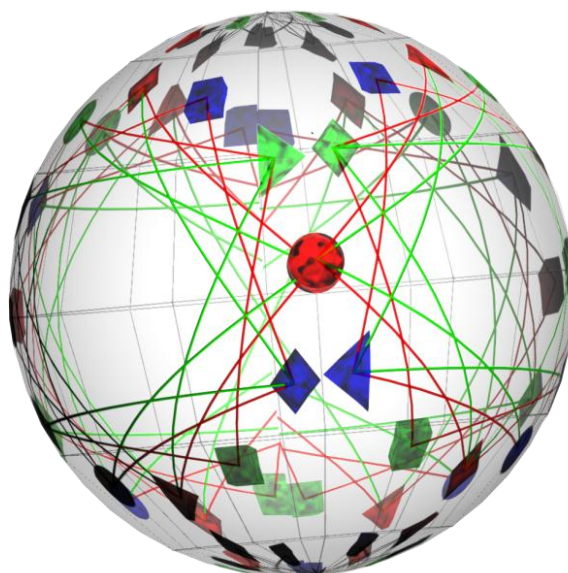


Figure 2-34 : Image de synthèse des deux "côtés" de l'hypersphère

2.2.5.4. L'espace à quatre dimensions E_4

Puisque tous les points sont situés sur deux cercles (2D), ces figures sont perpendiculaires en quatre dimensions. Ces cercles appartiennent à une hypersphère appelée S3. L'hypersphère S3 est un objet mathématique abstrait existant dans un espace à quatre dimensions, son volume est 4D, sa surface est 3D⁷⁶.

Forme des figures à quatre côtés

Une définition du carré est : quadrilatère ayant les côtés de même longueur et ses diagonales coplanaires. Comme nous nous situons dans des espaces de dimension supérieure à deux, il est nécessaire de vérifier que les quatre sommets de la figure sont bien coplanaires.

Nous vérifions que la longueur des quatre côtés est constante avec :

$$d(0,3) = d(3,6) = d(6,9) = d(9,0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ici, $d(a,b)$ représente la distance euclidienne entre les points a et b.

La coplanarité est validée si le produit scalaire des deux vecteurs composant les diagonales est nul. Nous le vérifions pour $\overrightarrow{06}$ et $\overrightarrow{39}$, les facteurs d'échelle étant omis nous avons :

$$\langle \overrightarrow{06}, \overrightarrow{39} \rangle = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0 \\ -1 & -1 \\ 0 & -0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ses côtés étant de même longueur et ses diagonales étant coplanaires, la figure formée par les quatre points (0,3,6,9) est bien un carré.

Par symétrie, les figures (1,4,7,10) et (2,5,8,11) sont aussi des carrés.

Forme des figures à trois côtés

Un triangle régulier possède par définition trois côtés de même longueur. Nous vérifions que

$$d(0,4) = d(4,8) = d(8,0) = 1,$$

avec d, la distance euclidienne.

Ses côtés étant de même longueur, la figure formée par les points (0,4,8) est bien un triangle régulier. Par symétrie, les figures (1,5,9), (2,6,10) et (3,7,11) sont aussi des triangles réguliers.

Conclusion concernant les formes géométriques en présence

Le volume projeté dans l'espace propre 4D de la matrice du graphe déduit des conditions initiales est composé d'au moins trois faces carrées

⁷⁶ Pour concevoir un objet 4D, prenons un exemple déjà connu : la boule que nous employons pour la pétanque est qui est bien concrète. C'est un volume en trois dimensions et sa surface est sphérique : elle se nomme S2. Le cercle, que l'on trace au pied du pointeur se nomme S1. Ce cercle est tracé sur un plan 2D. L'appellation S1 signifie qu'il n'y a qu'une seule coordonnée possible le long d'un cercle. Sur une sphère telle que la terre, il y a deux coordonnées, elle se nomme donc S2. Hipparque disait que la sphère est de dimension 2 car on décrit ses points par deux coordonnées : latitude et longitude. Voir aussi le film "Dimensions-Math" (Ley et al., 2008) sur le support informatique d'accompagnement (*Clip O 1 : Dimensions Math, l'hypersphère*).

et quatre faces triangulaires qui matérialisent les relations par tierce présentes dans le *Graphe Planet*. Les points sont situés sur une hypersphère de rayon $1/\sqrt{3}$. Ce rayon est un facteur d'échelle qui peut être adapté si besoin.

La projection du graphe dans ce sous-espace propre permet de distinguer chacune des douze notes.

Distances entre les points de l'espace E_1

Nous caractérisons ici les distances entre deux points en fonction des intervalles musicaux.

Soit s , la distance en demi-tons qui correspond à la distance en termes de graphe lorsque les classes de hauteurs sont réparties chromatiquement le long d'un graphe C_{12} . C'est le nombre de pas minimum à parcourir le long du cercle chromatique. Soit d , la distance géométrique entre les deux sommets matérialisant ces deux notes dans l'espace à quatre dimensions. Nous utilisons la distance comme la norme de la différence des deux quaternions représentant les coordonnées de chaque point. Le système étant circulant, nous pouvons calculer ces distances à partir de n'importe quel point de départ et choisissons arbitrairement l'origine en un point 0 qui symbolise *do*. La distance carrée, notée d^2 , est le carré de la distance euclidienne habituelle d .

Nous avons

$$d^2(j, j + s) = d^2(0, 0 + s) = \frac{1}{6} \left\| (e^{i0}, e^{i0}) - (e^{is\frac{\pi}{6}}, e^{is\frac{5\pi}{6}}) \right\|^2,$$

avec j variant de 0 à 11.

Il en résulte quatre valeurs possibles (hormis zéro) pour la distance géométrique. Le symbole $r = 1/\sqrt{3}$ correspond au rayon de la sphère (voir tableau 2-11 ci-dessous).

Tableau 2-11 : Matrice des distances dans l'espace E_1

Note		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nom latin		<i>do</i>	<i>do[#]</i>	<i>ré</i>	<i>mi^b</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>fa[#]</i>	<i>sol</i>	<i>sol[#]</i>	<i>la</i>	<i>si^b</i>	<i>si</i>
Distance à Do	Intervallique	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	Graphe	0	2	3	1	1	2	2	2	1	1	3	1
	Spatiale d^2	0	$2/3$	$1/3$	$2/3$	1	$2/3$	$4/3$	$2/3$	1	$2/3$	$1/3$	$2/3$
	Euclidienne	0	$r\sqrt{2}$	r	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{3}$	$r\sqrt{2}$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{3}$	$r\sqrt{2}$	r	$r\sqrt{2}$
Distance à l'origine		r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r

Les quatre distances possibles ne montrent pas de cohérence, elles sont classées, pour information, dans le tableau 2-12 suivant.

Tableau 2-12 : Distances physiques et intervalliques dans E_1

Distances			
Physique	Carrée d^2	Intervallique	Intervalle
$1/\sqrt{3}$	$1/3$	2; 10	M2; m7
$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$2/3$	1; 3; 5; 7; 9; 11	m2; m3; P4; P5; M6; M7
1	$3/3$	4; 8	M3; m6
$2/\sqrt{3}$	$4/3$	6	TT

En préférant d^2 à d , le classement est plus lisible, nous avons alors :

- $d^2 = 1/3$: le ton ;
- $d^2 = 2/3$: le demi-ton, la tierce mineure, la quarte, la quinte, la sixte et la septième majeure ;
- $d^2 = 3/3$: la tierce majeure et la quinte augmentée ;
- $d^2 = 4/3$: le triton.

Nous remarquons que la distance la plus grande, qui est aussi le diamètre de la sphère, correspond au triton. Les tritons étant diamétralement opposés dans chacune des vues scindant l'espace (cercles chromatiques et cercles des quarte), il est logique qu'ils soient diamétralement opposés dans l'hypersphère.

Toutes les notes appartenant à la première gamme par ton sont à la même distance de n'importe quelle autre note appartenant à la seconde gamme par ton. Malgré la présence de formes régulières, et bien que chaque point soit projeté de façon unique, cet espace ne présente pas d'analogie entre les distances intervalliques et les distances physiques.

Le fait d'ajouter des facteurs d'échelle pour chaque vecteur propre, c'est à dire changer leur norme, ne permettrait pas de réduire le nombre de distances possibles.

Cet espace permet de séparer les douze sommets du graphe, mais ne il montre pas d'analogie entre distances géométrique et intervallique.

2.2.6. Conclusion concernant la projection spectrale du *Graphe Planet*

Les projections en deux dimensions font apparaître la structure du *Graphe Planet* et permettent d'associer les propriétés musicales aux visualisations calculées. Elles ne peuvent servir de modèle géométrique dans cet état brut, car les notes ne sont pas distinctes. L'espace natif à quatre dimensions permet de séparer les douze notes, mais ne respecte pas l'analogie recherchée entre la distance intervallique et la distance géométrique. Afin d'obtenir l'analogie souhaitée et de réaliser un modèle

plus pertinent, nous allons construire ce modèle à partir des sous-espaces propres E_3 et E_4 ⁷⁷.

2.2.7. Construction du modèle géométrique

Considérons la somme directe des deux sous-espaces propres E_3 et E_4 , en vue de construire un espace à quatre dimensions que nous appellerons E_q .

L'espace E_q s'écrit alors

$$E_q = E_3 \oplus E_4.$$

Afin d'utiliser une nomenclature familière, nous notons x_p, y_p, z_p, w_p les coordonnées d'un point p dans l'espace E_q , et appelons (X, Y, Z, W) les axes du repère cartésien à quatre dimensions.

Afin de construire un modèle aux côtés unitaires, nous appliquons un facteur d'échelle à chaque couple de vecteurs normalisés. Cette homothétie ne change en rien la nature de l'espace E_q utilisé. L'intérêt est d'obtenir des côtés de même longueur pour les carrés et pour les triangles.

Les quatre vecteurs originaux (W_4, W_8, W_3, W_9) deviennent alors (X, Y, Z, W) tels que

$$X = \sqrt{2} \cdot W_4, Y = \sqrt{2} \cdot W_8, Z = \sqrt{3} \cdot W_3 \text{ et } W = \sqrt{3} \cdot W_9.$$

Nous pouvons alors exprimer les coordonnées de chaque point p en combinant k et k' :

$$x_p = W_{4,k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right); y_p = W_{8,k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right),$$

pour k variant de 0 à 2 et

$$z_p = W_{3,k'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{k'\pi}{2}\right); w_p = W_{9,k'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{k'\pi}{2}\right),$$

pour k' variant de 0 à 3.

Une animation de la projection du graphe dans cet espace est disponible en annexe multimédia (Clip 2 : *Planet Graph E3 E4 4D*, p. 296).

2.2.7.1. L'indexation par forme et couleur

Les indices k et k' symbolisent l'appartenance d'un sommet du graphe de départ aux graphes C_3 et C_4 concernés.

Le générateur k correspond à l'appartenance à un C_4 spécifique, c'est-à-dire à la partie couleur de la coloration que nous avons baptisée une *orbite*.

Le générateur k' exprime l'appartenance à un C_3 particulier, c'est aussi la partie forme de la coloration, encore appelée *saison*.

Muni des deux indices k et k' , nous générons l'ensemble des douze notes telles que chacune soit un arrangement unique parmi les douze possibilités de combiner de k et k' .

⁷⁷ Les sous-espaces propres étant par définition indépendants, cette combinaison est valide. Les vecteurs constituant le nouvel espace construit sont perpendiculaires et indépendants.

Autrement dit, pour la représentation graphique, un indice donne une couleur parmi trois, l'autre une forme parmi quatre. Nous avons ainsi douze combinaisons de formes et couleurs.

2.2.7.2. L'indexation par numéro de note

Il est possible de générer l'ensemble des points en utilisant une variable n , correspondant au numéro de la note dans la *Set Theory*, et variant de 0 à 11.

Les indices précédents k et k' , symbolisant une coloration à deux dimensions (forme et couleur), sont ainsi fonction de n tels que :

$$k = n \bmod 3 \text{ et } k' = n \bmod 4^{78}.$$

Dans ce cas, k varie bien de 0 à 2 et k' de 0 à 3.

Les coordonnées sont cycliques, l'ensemble des points peut être généré par une seule variable. Nous obtenons alors, avec n variant de 0 à 11 :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right); y_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right);$$

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right); w_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Les propriétés du modèle géométrique *Planet-4D* seront détaillées au chapitre 2.4.

Les quatre coordonnées de chaque point peuvent être exprimées sous forme d'un quaternion, représenté par le couple de complexes suivant :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2k'\pi}{4}}\right),$$

avec k variant de 0 à 2 et k' variant de 0 à 3, ou encore par













$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{2n\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2n\pi}{4}}\right)$$

avec n variant de 0 à 11.

Le chapitre suivant est consacré aux quaternions

⁷⁸ L'opération "mod" exprime le reste entier d'une division entre entiers. Par exemple : $7 \bmod 3 = 1$ car $7 = (3 \times 2) + 1$.

Tableau 2-13 : Coordonnées et symboles pour le modèle géométrique *Planet*

Note		Génération			Position		Symbole	Coordonnées 4D			
Nom	Lettre	n	k	k'	Orbite	Saison		X	Y	Z	W
<i>do</i>	C	0	0	0	Rouge	Sphère		$1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{2}$	0
<i>do</i> [#]	C [#]	1	1	1	Vert	Pyram		$-1/2\sqrt{3}$	1/2	0	$1/\sqrt{2}$
<i>ré</i>	D	2	2	2	Bleu	Cube		$-1/2\sqrt{3}$	-1/2	$-1/\sqrt{2}$	0
<i>mi</i> ^b	E ^b	3	0	3	Rouge	Tétra		$1/\sqrt{3}$	0	0	$-1/\sqrt{2}$
<i>mi</i>	E	4	1	0	Vert	Sphère		$-1/2\sqrt{3}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	0
<i>fa</i>	F	5	2	1	Bleu	Pyram		$-1/2\sqrt{3}$	-1/2	0	$1/\sqrt{2}$
<i>fa</i> [#]	F [#]	6	0	2	Rouge	Cube		$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{2}$	0
<i>sol</i>	G	7	1	3	Vert	Tétra		$-1/2\sqrt{3}$	1/2	0	$-1/\sqrt{2}$
<i>sol</i> [#]	G [#]	8	2	0	Bleu	Sphère		$-1/2\sqrt{3}$	-1/2	$1/\sqrt{2}$	0
<i>la</i>	A	9	0	1	Rouge	Pyram		$1/\sqrt{3}$	0	0	$1/\sqrt{2}$
<i>si</i> ^b	B ^b	10	1	2	Vert	Cube		$-1/2\sqrt{3}$	1/2	$-1/\sqrt{2}$	0
<i>si</i>	B	11	2	3	Bleu	Tétra		$-1/2\sqrt{3}$	-1/2	0	$-1/\sqrt{2}$

Le tableau 2-13 ci-dessus récapitule les symboles et positions des sommets du modèle géométrique *Planet* dans l'espace E_q à quatre dimensions. Elle indique le nom latin de la note et son numéro dans la *Set Theory*, qui correspond au générateur n. Elle montre ensuite les indices k et k' et les noms attribués aux formes et couleurs utilisées pour la représentation graphique ; le symbole résultant est présenté dans la colonne adjacente. Enfin, les quatre coordonnées de chaque sommet⁷⁹ y sont détaillées.

⁷⁹ Les sommets du graphe pouvant être des notes, des tonalités ou des accords selon l'application, les symboles s'adapteront. Voir la vidéo Clip F 5 : The Planet-4D, p. 267Clip F 5.

2.3. ETUDE AUTOUR DES QUATERNIONS

2.3.1. La démarche quaternions

2.3.1.1. Ce que sont les quaternions

Les quaternions sont des nombres à quatre dimensions, utilisés principalement pour leurs propriétés décrivant les rotations spatiales. Ils sont présents dans divers domaines tels que la simulation de vol, et la robotique, et aussi en imagerie médicale.

Par extension similaire à celle qui avait conduit de l'ensemble des nombres réels à celui des nombres complexes (passer de nombres à une dimension aux nombres à deux dimensions), l'ensemble des quaternions est une extension de l'ensemble des nombres complexes : de deux vers quatre dimensions.

Les quaternions furent mis en forme au XIX^{ème} siècle, par Hamilton⁸⁰ qui cherchait à construire un ensemble de nombres ayant, dans l'espace, des propriétés analogues à celles que possèdent les nombres complexes dans le plan⁸¹. Il les présente comme des quadruplets de réels.

Le tableau 2-14 suivant montre diverses notations pour les quaternions, avec i, j, et k , nombres imaginaires tels que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Tableau 2-14 : Exemple de notation pour les réels, les complexes et les quaternions

Nombres réels : $x \in \mathbb{R}$	Nombres complexes : $z \in \mathbb{C}$ (ou \mathbb{R}^2)	Quaternions : $q \in \mathbb{R}^4$
$x = a$ $x = \pi$	$z = (a, b)$ $z = a + ib$ $z = r \cdot e^{i\theta}$	$q = (a, b, c, d)$ $q = a + ib + jc + kd$ $q = z + jz'$

⁸⁰ Sur une plaque commémorative sur le pont de Broom à Dublin on lit "Ici alors qu'il se promenait le 16 octobre 1843, Sir William Rowan Hamilton découvrit dans un éclair de génie la formule fondamentale pour la multiplication de quaternions $i^2 = j^2 = k^2 = i.j.k = -1$ et la grava sur une pierre de ce pont". (www.maths.nuim.ie/hamiltonwalk) Il s'agit bien de celui qui donna son nom aux chemins hamiltoniens dont nous parlons souvent dans cette étude. Arthur Cayley, qui donna son nom à certains graphes fréquemment utilisés ici, formula à son tour, deux ans plus tard, l'algèbre des octonions. Ce sont des nombres à huit dimensions, construits à partir de couples de quaternions de Hamilton.

⁸¹ Comme tout quaternion peut s'écrire $q = z + jz'$, avec z et z' deux nombres complexes, ils sont parfois appelés, selon Gauss, des nombres hypercomplexes.

2.3.1.2. Origine de la recherche par quaternions

Nombre d'articles traitent des *Tonnetze* et de la décomposition de notre espace de hauteurs. Utilisant des méthodes différentes, les chercheurs en mathématique et musique ont démontré que notre espace des notes, dans le cadre d'un tempérament égal, peut être considéré comme une combinaison de tierces majeures et de tierces mineures⁸².

- Gérard Balzano (Balzano, 1980) a montré que l'espace du tempérament égal à douze sons possède la structure d'un groupe cyclique d'ordre 12 : C_{12} , isomorphe au produit direct de deux de ses sous-groupes C_3 et C_4 . N.B. : la notation C_n employée dénote, dans ce cas, un groupe cyclique et non un graphe cycle.
- Dans son ouvrage *Der übermässige Dreiklang* (Weitzmann, 1853), Carl Friedrich Weitzmann⁸³ décrit l'importance de la triade augmentée et dessine l'arrangement des "Douze sons de notre système" par groupes de trois et quatre.
- Thomas Noll (Noll, 2001) utilise le concept d'un module T_{12} et démontre sa décomposition sous la forme $T_{12} = T_3 \otimes T_4$, avec T_3 et T_4 , deux sous-modules de T_{12} . Le module T_3 est appelé "outer 3 circle" et ses éléments "inner 4 circles" ou "dimtones". Le module T_4 se nomme "outer 4 circle", il est composé des "inner 3 circles" ou "augtones". Les termes "augtones" et "dimtones" faisant référence aux accords augmentés et diminués.
- Guerino Mazzola, dans *The Topos of Music* considère le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} , et utilise une méthode algébrique rapide et efficace : la décomposition de Sylow (Mazzola 2002, p. 218). Avec cette méthode, les nombres 3 et 4 étant premiers entre eux et leur produit étant 12, la décomposition de l'espace des hauteurs s'écrit sous la forme $@Z_{12} \Rightarrow @(Z_3 \otimes Z_4)$.
- Dans cette étude, au chapitre précédent (2.1), nous avons montré par la théorie des graphes une décomposition de l'ensemble des 12 classes de hauteurs sous la forme $C_3 \square C_4$, produit cartésien de deux graphes cycles élémentaires.
- Le modèle géométrique *Planet* est construit à partir de sous-espaces propres du laplacien normalisé du graphe, combinés en hyperespace. Dans ce modèle, les indices générateurs symbolisent l'appartenance d'un sommet du graphe de départ aux graphes C_3 et C_4 concernés.

⁸² "En ce qui concerne la formalisation des structures musicales, le modèle toroïdal du tempérament a été introduit, de façon indépendante, par Gerald Balzano et Guerino Mazzola" (Andreatta, 2003).

⁸³ Voir la représentation originale de Weitzmann au chapitre 3.3.6.

Quelle que soit la formalisation utilisée, les décompositions sont similaires⁸⁴, et peuvent être formulés simplement par :

- Nous avons 12 notes.
- Elles peuvent être organisées en 4 groupes de 3 et 3 groupes de 4.
- Chaque note appartient à un seul groupe 3 et un seul groupe de 4.

Nous allons, dans ce chapitre, partir de cette décomposition et re-composer l'espace, cette fois de façon géométrique, en utilisant des nombres adaptés : les quaternions.

2.3.1.3. Démarche utilisée

En partant de carrés et de triangles réguliers calculés avec des nombres complexes puis assemblés en quaternions, nous démontrerons que les points sont situés physiquement sur une hypersphère de dimension quatre, dont les distances carrées possibles entre points sont 0,1,2 ou 3.

A partir de la matrice des distances, nous ne garderons que les seules valeurs 0 et 1 et en ferons la matrice d'adjacence d'un graphe simple (voir chapitre 2.1.2.6). Ce graphe fera alors état des relations entre les notes. Nous analyserons ce graphe et montrerons que c'est un isomorphe du *Graphe Planet*. Cette approche est illustrée par la figure 2-35 suivante.

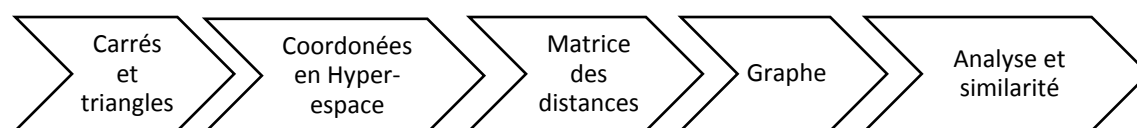


Figure 2-35 : Cheminement utilisé avec les quaternions

2.3.2. Construction du modèle par quaternions

2.3.2.1. Construction en hyperspace

Cherchons douze points de l'espace \mathbb{R}^4 tels que par trois ils forment un triangle régulier et, par quatre, un carré. Les côtés du carré et ceux du triangle seront de longueur unitaire. Les 12 points de l'hyperespace à quatre dimensions possèdent des coordonnées quaternioniques notées q telles que

$$q \in \mathbb{R}^4, q = (a, b, c, d) \text{ ou } q = a + ib + jc + kd, \text{ avec } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

⁸⁴ Sans connaître les fondements mathématiques de ces décompositions, les musiciens sont familiers de cette répartition par tierces. Après avoir essayé de dessiner une représentation symétrique en deux ou trois dimensions, le modèle Planet fut imaginé à l'origine en quatre dimensions et projeté directement, sans calcul, statiquement en trois dimensions, voir l'image de la sculpture en annexe, Figure 6-10, p. 251.

En considérant les quaternions comme deux complexes orthogonaux z et z' tq $z = a + ib$ et $z' = c + id$, on a : $q = z + jz'$.

Nous choisissons de construire les carrés dans la première partie : z , et les triangles dans la seconde : z' .

L'ensemble des carrés et celui des triangles seront orthogonaux, car ils appartiennent à deux espaces 2D perpendiculaires.

2.3.2.2. Coordonnées des éléments de base

La recherche des sommets d'un triangle régulier revient à trouver les racines troisièmes de l'unité. Cherchons un complexe z , tel que $z^3 = 1$.

Nous obtenons alors $z = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $k \in (0,1,2)$, soit

$$z \in \left\{ (1,0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}.$$

Les côtés du triangle étant de longueur $\sqrt{3}$, une homothétie les rendra unitaires. Nous avons alors :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{2k\pi}{3}} \text{ avec } k \in (0,1,2),$$

$$\text{soit } z \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{-1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

De façon analogue, la recherche des sommets d'un carré en nombres complexes revient à calculer les racines quatrièmes de l'unité.

Nous cherchons z' , complexe, tel que $z'^4 = 1$.

Ce qui résulte en $z' = e^{i\frac{2k'\pi}{4}}$ avec $k' \in (0,1,2,3)$, soit

$$z' \in \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}.$$

Les côtés du carré étant de $\sqrt{2}$, nous appliquons de façon similaire, une homothétie afin qu'ils soient unitaires. Nous avons alors :

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2k'\pi}{4}} \text{ avec } k' \in (0,1,2,3), \text{ soit}$$

$$z' \in \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

2.3.2.3. Assemblage et coordonnées 4D

En utilisant toutes les combinaisons issues des deux complexes, nous obtenons la série Q des 12 quaternions suivants :

$$Q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2k'\pi}{4}} \right) \text{ avec } k \in (0,1,2), \text{ et } k' \in (0,1,2,3).$$

Comme au chapitre précédent (2.2.7), la génération avec k et k' peut être remplacée par une autre génération avec un indice unique n variant de 0 à 11. En choisissant $k = n \bmod 3$ et $k' = n \bmod 4$, la série devient :

$$Q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2n\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2n\pi}{4}} \right), \text{ avec } n \in (0,1,\dots,11).$$

2.3.2.4. Vérification de l'hypersphéricité

Afin de vérifier que les points sont bien sûr une hypersphère centrée à l'origine, il suffit de calculer la distance vers l'origine de chaque point, c'est-à-dire la norme de chaque quaternion.

La norme d'un quaternion $q = (a, b, c, d)$ se calcule de la façon suivante :

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Chaque quaternion étant composé des deux complexes orthogonaux :

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2k\pi}{3}} \text{ et } z' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2k'\pi}{4}}$$

avec $k \in (0,1,2)$ et $k' \in (0,1,2,3)$, nous pouvons écrire

$$\|q\| = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2}.$$

Les coefficients k et k' n'intervenant que pour la partie angulaire des nombres complexes, les normes de chaque complexe sont constantes. Nous obtenons alors :

$$\|q\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Les points sont tous sur une hypersphère d'ordre 4 et de rayon $\sqrt{\frac{5}{6}}$ ⁸⁵.

2.3.2.5. Conclusion

Les coordonnées trouvées sont celles du modèle géométrique *Planet*, qui a été calculé au chapitre précédent. La position spatiale de chaque note est distincte et fonction de son numéro n dans la *Set Theory* :

$$Q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2n\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2n\pi}{4}} \right), \text{ avec } n \in (0,1,\dots,11).$$

⁸⁵ Les deux cercles générateurs sont de rayons différents mais les points sont tous à égale distance de l'origine. Il s'agit d'un ensemble discret de points à la surface d'une sphère.

2.3.3. Distances entre les quaternions

Nous allons ici créer une matrice D_2 d'ordre 12 représentant les distances entre chaque quaternion. Pour plus de lisibilité, nous utiliserons la distance carrée d^2 tq.

$$d^2(q_i, q_j) = \|q_i - q_j\|^2.$$

La matrice se définit par :

$$D_2(i, j) = d^2(q_i, q_j) = \|q_i - q_j\|^2.$$

Les calculs que nous ne détaillerons pas donnent le résultat suivant :

$$D_2 =$$

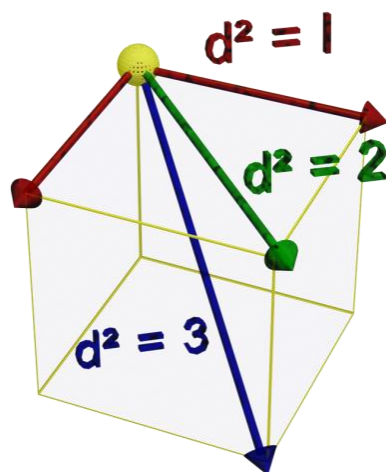
0	2	3	1	1	2	2	2	1	1	3	2
2	0	2	3	1	1	2	2	2	1	1	3
3	2	0	2	3	1	1	2	2	2	1	1
1	3	2	0	2	3	1	1	2	2	2	1
1	1	3	2	0	2	3	1	1	2	2	2
2	1	1	3	2	0	2	3	1	1	2	2
2	2	1	1	3	2	0	2	3	1	1	2
2	2	2	1	1	3	2	0	2	3	1	1
1	2	2	2	1	1	3	2	0	2	3	1
1	1	2	2	2	1	1	3	2	0	2	3
3	1	1	2	2	2	1	1	3	2	0	2
2	3	1	1	2	2	2	1	1	3	2	0

La matrice D_2 fait apparaître quatre types de distances d^2 différentes :

- 0 : présent seulement sur la diagonale indique qu'il n'y a pas de points superposés ;
- 1 : correspond au côté du carré ou du triangle initial ;
- 2 : ($d^2 = 2$) est la longueur d'une diagonale d'un carré unitaire ;
- 3 : ($d^2 = 3$) est la longueur d'une diagonale d'un cube unitaire.

La figure 2-36 ci-dessous représente ces trois distances spatiales.

Pour chaque point situé sur cette hypersphère, nous avons : quatre points voisins directs distants de 1 ; cinq points distants spatialement de 2, et deux points plus éloignés, à une distance de 3.

Figure 2-36 : Les distances possibles dans le modèle *Planet-4D*

2.3.4. Des quaternions aux graphes

La matrice des distances représente les distances physiques entre chacun des points, nous allons ici créer un graphe reliant les points les plus proches : distants physiquement de 1. La figure 2-37 suivante montre un exemple de points considérés comme voisins dans un espace 3D conventionnel.

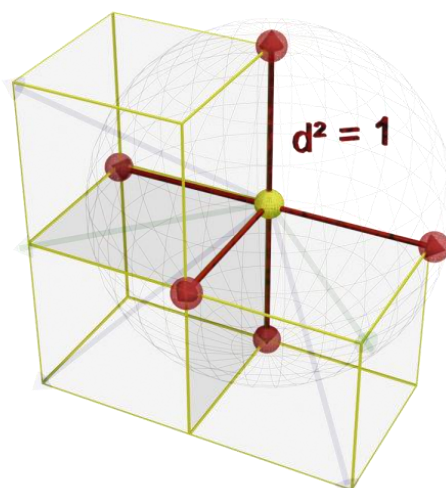


Figure 2-37 : Les points voisins dans un espace 3D

La matrice créée A se définit de la façon suivante :

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } D_{2i,j} = 1; \\ 0, & \text{autres cas.} \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est identique à la matrice d'adjacence du *Graphe Planet*, le graphe associé à la matrice A est donc le *Graphe Planet*, dont la figure suivante (figure 2-38) propose une représentation.

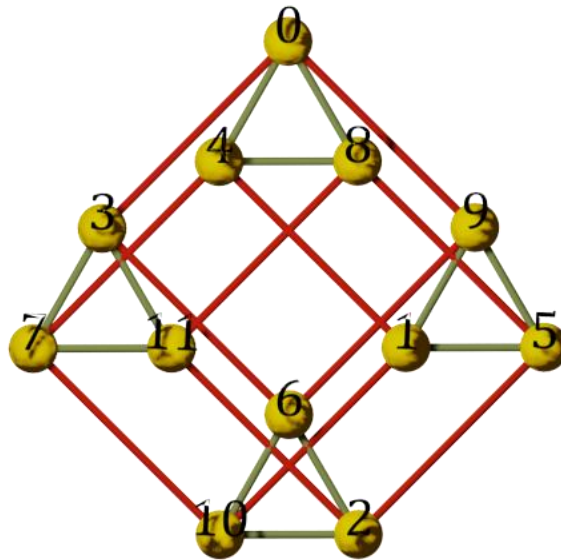


Figure 2-38 : Le graphe résultant de l'étude par quaternions

2.3.5. Conclusions

Le passage par les quaternions permet de formaliser directement un modèle géométrique à partir de la décomposition de \mathbb{Z}_{12} . En décidant de lier les points de l'hyperespace qui sont physiquement proches, nous créons un graphe de voisinage pertinent. Le graphe trouvé est isomorphe au *Graphe Planet*, sa projection spectrale est la même que celle présentée précédemment (chapitre 2.2). Le schéma ci-dessous (figure 2-39) montre les chemins utilisés pour la recherche du modèle.

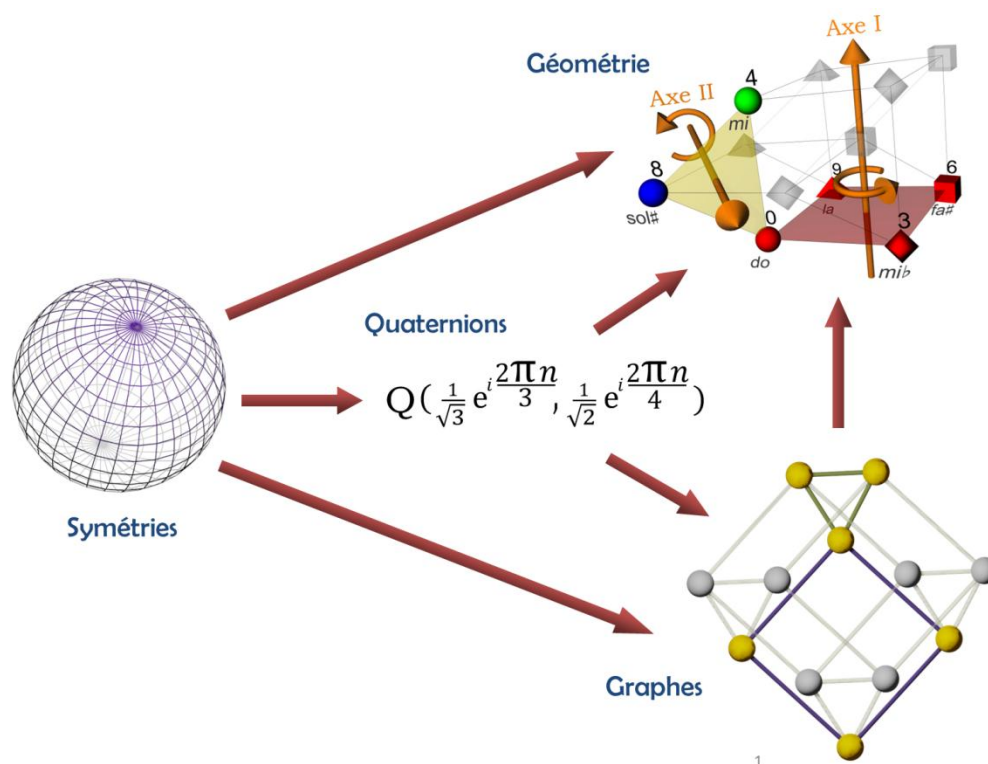


Figure 2-39 : Les relations entre les méthodes utilisées

2.4. PROPRIETES DU MODELE GEOMETRIQUE

Nous détaillons ici les propriétés physiques du modèle géométrique *Planet-4D*.

2.4.1. Les distances dans le modèle

Il est requis que les distances physiques soient en relation avec les distances intervalliques. En effet, avec la représentation traditionnelle des douze notes le long d'un cercle, l'intervalle musical entre chaque point est constant. Chaque intervalle musical correspond à une distance physique dans le plan, par exemple tous les tritons sont distants entre eux du diamètre du cercle. Cette condition de symétrie est essentielle, elle est définie dans l'introduction (voir chapitre 1.1.4).

2.4.1.1. La distance intervallique

La distance en demi-tons, intervalle musical, est la distance perçue par l'auditeur⁸⁶. Comme nous sommes dans un système cyclique, nous retenons à chaque fois la distance la plus courte. La quarte et la quinte, de longueurs respectives 5 et 7, sont des reversements au sens musical du terme. Nous prenons la longueur 5 pour une quinte (*do-sol*) ou une quarte (*do-fa*). Le triton est alors l'intervalle le plus grand : il vaut 6 demi-tons soit 3 tons.

2.4.1.2. La distance physique

Les coordonnées des sommets sont exprimées par un ensemble de quatre valeurs réelles (voir chapitre 2.3.2.2), ou par un quaternion.

Les deux approches sont équivalentes : les calculs concernant les distances physiques ayant été réalisés au paragraphe précédent (0), nous reprenons ces valeurs et les plaçons dans le tableau suivant (tableau 2-15), à la ligne "Distance carrée à *do* d^2 ". Cette distance s'appelle la distance carrée, elle se note d^2 et correspond au carré de la distance que chacun utilise : la distance euclidienne d . Les deux distances physiques sont renseignées dans le tableau suivant (tableau 2-15). Nous y avons aussi fait figurer la distance euclidienne entre chacun des points et l'origine de l'espace, afin de montrer qu'ils sont sur une sphère centrée à l'origine.

2.4.1.3. La distance sur le graphe

C'est simplement le nombre de pas minimum à parcourir pour rejoindre le second sommet ou, plus formellement, le nombre minimal d'arêtes séparant ces sommets. Cette distance correspond au nombre minimum de rotations à effectuer dans l'espace à quatre dimensions pour atteindre le sommet spécifié à partir de la position considérée. Cette distance correspond à la distance d_1 sur un tore⁸⁷.

⁸⁶ Nous calculons cette distance en tons ou demi-tons, qui sont des divisions de l'octave. L'oreille identifie les distances et intervalles musicaux de cette façon, mais, en réalité, les écarts de fréquences sont logarithmiques. Ainsi, un écart perçu linéairement comme une octave (6 tons), correspond physiquement à un doublement de la fréquence du son. Dans *The Topos of Music* (Mazzola, 2002), Guerino Mazzola définit le MathPitch h d'une fréquence f par $h(f) = u \cdot \ln(f) + v$, avec u et v , coefficients de normalisation. Il explique que le rapport de deux fréquences f et g peut s'écrire comme la différence de leur deux MathPitch : $h(f) - h(g) = u \cdot \ln(f/g)$, et que cette transformation reflète l'expérience auditive montrant que le rapport entre deux fréquences est perçu comme distance entre hauteurs de sons. "This transformation reflects the auditory experience that the frequency ratio f/g is perceived as a pitch distance" (Mazzola, 2002, p. 72).

⁸⁷ Cette distance est définie dans *The Topos of Music* (Mazzola, 2002, p. 473), c'est aussi le nombre minimal de sommets reliant deux points du tore (Mazzola, 2002, p. 622).

2.4.1.4. Matrice des distances pour chaque note

Le tableau récapitule les différents types de distances, ainsi que toutes les valeurs possibles, avec $r = \sqrt{5/6}$, le rayon de l'hypersphère.

Tableau 2-15 : Matrice d/es distances dans le modèle *Planet*

Note		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nom latin		<i>do</i>	<i>do[#]</i>	<i>ré</i>	<i>mi^b</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>fa[#]</i>	<i>sol</i>	<i>sol[#]</i>	<i>la</i>	<i>si^b</i>	<i>si</i>
Distance à <i>do</i>	Intervallique	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	Graphe	0	2	3	1	1	2	2	2	1	1	3	2
	Carrée d^2	0	2	3	1	1	2	2	2	1	1	3	2
	Euclidienne	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
Distance à l'origine		r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r

La distance géométrique d^2 est équivalente à celle en termes de graphe, cela s'explique par le fait qu'un déplacement le long du graphe correspond à une rotation en hyperspace (voir chapitre 2.4.4).

Nous ordonnons à présent les notes selon leur distance par rapport à la première note *do* ou N°0 et constatons qu'il n'y a que trois distances possibles, et que celles-ci sont cohérentes entre elles. Le tableau ci-dessous (tableau 2-16) classe les intervalles selon les distances mesurées.

Tableau 2-16 : Distances physiques et intervalles dans le modèle *Planet-4D*

Distances			
Physique d	Carrée d^2	Intervallique	Intervalle
1	1	3; 4; 8; 9	m3; M3; m6; M6
$\sqrt{2}$	2	1; 5; 6; 7; 11	m2; P4; TT; P5; M7
$\sqrt{3}$	3	2; 10	M2; m7

Ce tableau montre que, par rapport un sommet, les autres sommets qui se trouvent à une distance de 1 sont :

- 3 et 9 : la tierce mineure montante, notée m3, et la sixte majeure montante, notée M6, qui est le renversement de la tierce mineure descendante ;
- 4 et 8 : la tierce majeure, notée M3, et la sixte mineure montante : son renversement, notée m6.

En conclusion, deux sommets du modèle sont distants de

- 1 : s'ils appartiennent à un même carré ou à un même triangle. C'est-à-dire qu'ils font partie d'un même graphe élémentaire C_3 ou sont voisins sur un C_4 . Ceci concerne les tierces majeures et mineures.
- 2 : s'ils forment une seconde mineure, une quarte, ou leurs renversements respectifs : septième majeure, quinte, ou encore un triton.
- 3 : s'ils sont distants d'une seconde majeure ou de son renversement, la septième mineure.

2.4.2. Choix possible d'une autre hypersphère

Une autre approche consiste à placer les sommets du modèle sur une hypersphère S^3 de rayon unitaire⁸⁸. Dans ce cas, nous appliquons la même homothétie à chaque partie du quaternion : soit $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous appelons le modèle résultant : *Planet-S3*.

L'ensemble trouvé s'écrit :

$$Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2k'\pi}{4}}\right)$$

avec k variant de 0 à 2 et k' variant de 0 à 3, ou encore

$$Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2n\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{2n'\pi}{4}}\right),$$

avec n variant de 0 à 11.

Les calculs suivants sont similaires à ceux développés au chapitre 2.4.1 ; la norme du quaternion devient :

$$\|q\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = 1.$$

La matrice des distances D_2 s'écrit dans le cas de *Planet-S3* :

$$D_2 = \frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ \hline 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 \\ \hline 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ \hline 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ \hline 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 & 7 \\ \hline 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 & 5 \\ \hline 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 5 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

⁸⁸ Idée de recherche suggérée par le mathémusicien Emmanuel Amiot (entretien mai 2010).

La matrice D_2 fait apparaître cinq valeurs différentes pour la distance d^2 ; nous en donnons la correspondance dans le tableau 2-17 suivant :

Tableau 2-17 : Matrice des distances dans le modèle *Planet-S3*

Note		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nom latin		<i>do</i>	<i>do</i> [#]	<i>Ré</i>	<i>mi</i> ^b	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>fa</i> [#]	<i>sol</i>	<i>sol</i> [#]	<i>la</i>	<i>si</i> ^b	<i>si</i>
Distance à <i>do</i>	Intervallique	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	Graphe	0	2	3	1	1	2	2	2	1	1	3	2
	Carrée d^2	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
	Euclidienne	0	$\sqrt{7/2}$	$\sqrt{5/2}$	1	$\sqrt{3/2}$	$\sqrt{5/2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5/2}$	$\sqrt{3/2}$	1	$\sqrt{5/2}$	$\sqrt{7/2}$
Distance à l'origine		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

L'hypersphère unitaire montre une excellente cohérence entre les distances physiques d^2 et les distances intervalliques : Les tierces majeures et tierces mineures sont de longueurs différentes. Chaque intervalle pouvant être interprété comme une suite de tierces, la longueur de ce dernier (distance carrée) est la somme des éléments le constituant.

Avec l'hypersphère unitaire, il n'y a pas de correspondance entre la distance logique, (autrement dit en termes de graphe) et la distance spatiale. L'hypersphère utilisée pour le modèle *Planet* (voir chapitre 2.4.1), respecte cette invariance⁸⁹.

2.4.3. Arêtes, faces et volumes

Nous étudions ici les éléments géométriques constitutifs du modèle géométrique *Planet-4D*.

2.4.3.1. Eléments à une dimension

Ce sont des segments reliant deux sommets, ils sont tous de longueur unitaire et représentent des intervalles de tierces majeures ou de tierces mineures. Le système comprenant douze notes, nous avons douze tierces mineures ainsi que douze tierces majeures possibles.

⁸⁹ La condition initiale spécifiant que les côtés de chaque carré et de chaque triangle du modèle géométrique soient de longueur 1 a pour avantage d'homogénéiser les distances physiques entre les notes, et d'obtenir des valeurs habituelles pour les autres distances rencontrées : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, correspondant respectivement à la diagonale d'un carré et à celle d'un cube. Les carrés et cubes dans le modèle *Planet-4D* sont ainsi également unitaires.

Le modèle *Planet-4D* comporte vingt-quatre segments, son périmètre est 24. La figure 2-40 ci-dessous illustre, à gauche, deux tierces mineures et, à droite, deux tierces majeures.

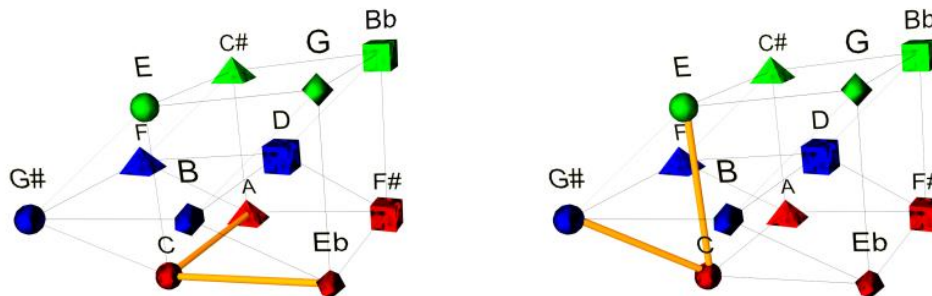


Figure 2-40 : Les deux types d'éléments à une dimension dans *Planet-4D*

2.4.3.2. Éléments à deux dimensions

Les éléments bidimensionnels triviaux sont les triangles et les carrés qui ont été utilisés lors de la recherche par quaternions (chapitre 2.3.2).

Les quatre triangles ont pour sommet les trois notes d'un accord augmenté, la surface de chaque triangle est $\sqrt{3}/4$.

Les trois carrés triviaux ont pour sommet les quatre notes d'un accord diminué, leur surface est 1.

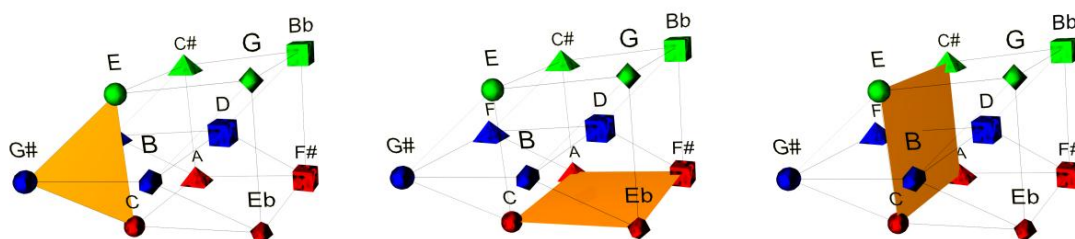
Douze autres faces carrées, de surface unitaire, sont aussi présentes dans le modèle, elles sont les quatre notes d'un groupe particulier : un accord à la fois mineur et majeur. Basé au point 0, il comprend les points $\{0,3,4,7\}$; soit les deux tierces et la quinte. Ce qui donne pour *do* : $\{do, mi^b, mi, sol\}$ il peut se chiffrer $C^{9\#}$ ⁹⁰. Cet accord peut être considéré comme une expression de la "blue note" : un accord de *do* avec une ambiguïté majeur-mineur caractéristique. Citons, de façon non exhaustive, son utilisation typique chez Bartók (Honti, 2007) et son utilisation principale dans *Shiraz* de Claude Vivier.

Si l'on divise ces faces en joignant les quintes, apparaissent deux triangles rectangles de surface $1/2$. Leurs sommets sont les notes des accords majeurs et mineurs à trois sons. Nous retrouvons l'espace dual du *Tonnetz* : le graphe *Chicken Wire* de Jack Douthett et Peter Steinbach (Douthett & Steinbach, 1998) ⁹¹.

Le modèle comporte dix-neuf faces planes ; sa surface est $15 + \sqrt{3}$. La figure 2-41 ci-dessous représente les différents types de faces planes : à gauche un triangle trivial, au centre un carré trivial et à droite, un carré correspondant à l'accord majeur-mineur.

⁹⁰ On le trouve récemment sous l'appellation *minor major mixture* (Fiore & Noll, 2011).

⁹¹ Cette division est à l'origine de l'*Hypersphère Tonnetz*, représentant les 24 accords parfaits sur une hypersphère, présentée au chapitre 2.6.2. Le *Chicken Wire* est représenté par la Figure 3-44, p. 172.

Figure 2-41 : Les trois types d'éléments à deux dimensions dans *Planet-4D*

2.4.3.3. Éléments à trois dimensions

Nous dénombrons trois cubes et quatre prismes triangulaires (droits et semi-réguliers).

Les trois cubes ont pour sommet les notes combinées de deux accords diminués, ce sont les notes du deuxième mode à transposition limitée d'Olivier Messiaen⁹², ou de la troisième échelle périodique de Bartók⁹³. On la nomme aussi gamme diminuée ou gamme "demi-ton ton".

La partition ci-dessous (figure 2-42) montre les notes correspondant à l'un des deux cubes contenant *do*.



Figure 2-42 : La troisième échelle périodique de Bartók

Le volume de chaque cube est 1.

Les quatre prismes ont pour bases les sommets correspondant aux notes de deux accords augmentés, les autres faces sont des carrés dont les sommets sont des accords majeur-mineurs. La gamme formée par les six sommets est un mode à transposition limitée (mais pas de Messiaen), c'est la gamme augmentée qui correspond à la deuxième échelle périodique de Bartók. Par exemple, pour l'un des deux prismes contenant *do*, les faces sont les notes des accords C^+ , $C^\#$, C^\sim , E^\sim et A^\sim , la gamme correspondante est *do*, *do*[#], *mi*, *fa*, *sol*[#], *la*. La partition ci-dessous (figure 2-43) montre une gamme augmentée ou deuxième échelle périodique de Bartók.

⁹² Les modes à transposition limitées d'Olivier Messiaen sont définis par l'auteur dans "La technique de mon langage musical", (Messiaen, 1944). Le terme *Mode* est le terme généralement utilisé même si pour Messiaen il s'agit plutôt d'échelle. Voir l'article de Jean Marc Chouvel pour les précisions musicologiques (Chouvel, 2006).

⁹³ Le mémoire de Dominique Rivolta est un catalogue des modes à transposition limitées pour l'échelle chromatique à 12 sons (Rivolta, 1998). Il y présentent les échelles de Bartók en citant (Hakim & Dufourcet, 1995).

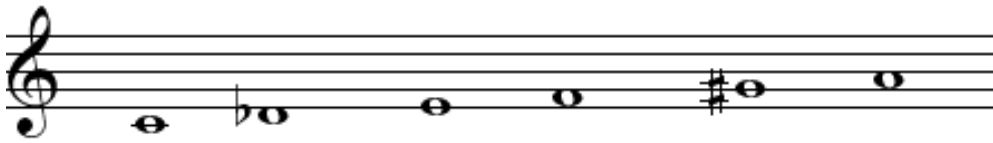
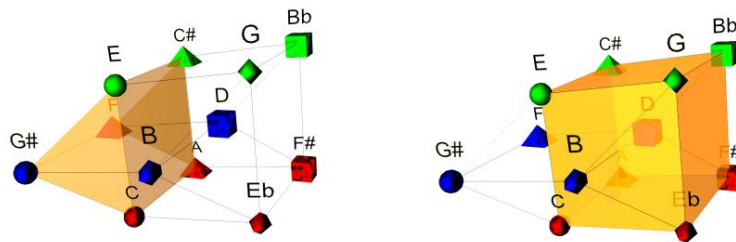


Figure 2-43 : La deuxième échelle périodique de Bartók

Le volume de chaque prisme est $\sqrt{3}/4$.

Le modèle comporte sept faces tridimensionnelles ; son volume ou surface 3D est $3 + \sqrt{3}$.

Figure 2-44 : Les deux types d'éléments à trois dimensions dans *Planet-4D*

L'image ci-dessus (figure 2-44) montre, à gauche, un prisme passant par *do*, et, à droite, un cube passant par *do*.

A chacun des quatre prismes correspond une des quatre formes de la deuxième échelle périodique de Bartók, et, à chacun des trois cubes, une des trois formes de la troisième échelle périodique de Bartók.

2.4.3.4. L'élément à quatre dimensions

C'est le modèle *Planet-4D*, détaillé plus haut (chapitre 2.4), les points sont sur une hypersphère de rayon $\sqrt{5}/\sqrt{6}$.

Pour une hypersphère de rayon r , le volume est $\pi^2 r^4/2$ et la surface 3D : $2 \pi^2 r^3$.

L'*Hypersphère* contenant le modèle *Planet-4D* a pour volume $\frac{25}{72} \pi^2$, sa surface volumique est de $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} \pi^2$.

Le tableau 2-18 ci-dessous récapitule les mesures du modèle *Planet-4D*. Le symbole \sim indique l'accord majeur-mineur.

Tableau 2-18: Grandeurs physiques et mesures dans le modèle Planet-4D

Propriété	Valeur
Nb sommets	12
Nb arêtes	24
Longueur des arêtes m3	1
Longueur des arêtes M3	1
Périmètre	24
Rayon	$\sqrt{5}/\sqrt{6}$
Surface d'un triangle (+)	$\sqrt{3}/4$
Surface d'un carré (°)	1
Surface d'un carré (~)	1
Surface totale	$15 + \sqrt{3}$
Volume d'un cube	1
Volume d'un prisme	$\sqrt{3}/4$
Volume total	$3 + \sqrt{3}$
Volume de l'hypersphère	$\frac{25}{72} \pi^2$
Surface volumique	$\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} \pi^2$

2.4.4. Rotations et graphe

Le modèle géométrique à quatre dimensions est basé sur deux plans parallèles, dans lesquels s'effectuent les rotations. Voir figure 2-45 ci-dessous.

Comme nous ne pouvons pas le dessiner sur ce support physique à deux dimensions, il faut imaginer que le premier axe passe par le centre de chaque carré et que le second axe traverse le centre de chacun des triangles. Afin de ressentir la symétrie, le modèle est mis en mouvement et projeté en 3D⁹⁴.

⁹⁴ Voir les animations du modèle *Planet-4D* et de sa la construction en quatre dimensions sur le DVD joint : Clip F 4 : Combining Two 2D Subspaces et Clip F 5 : The Planet-4D, p. 268.

2.4.4.1. Les deux axes de rotation

Lors de l'utilisation dynamique du modèle, un déplacement le long du *Graphe Planet* correspond à une rotation du modèle 4D. Les déplacements le long des graphes élémentaires C_3 et C_4 se traduisent géométriquement par une rotation selon les axes II et I ⁹⁵ (voir figure 2-45 ci-dessous).

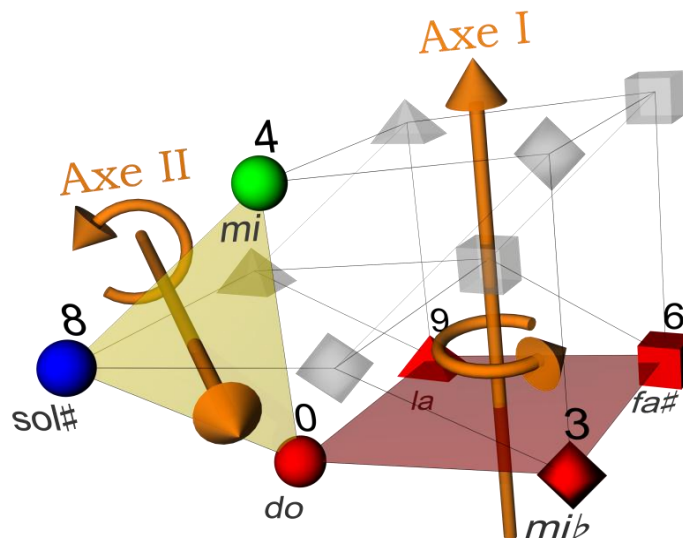


Figure 2-45 : Les deux axes de rotation du modèle *Planet-4D*

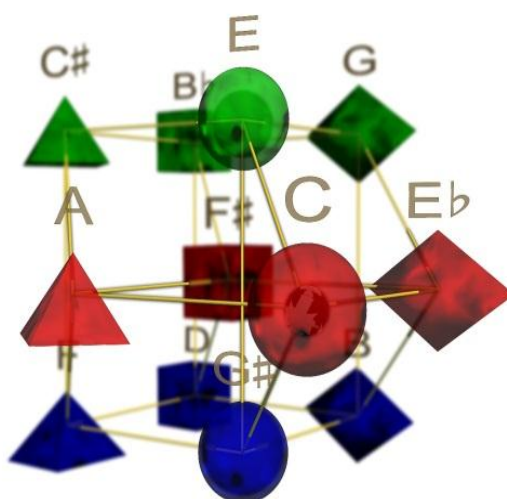
Les rotations s'effectuant dans l'hypermespace⁹⁶, la projection dans notre espace tridimensionnel ne changeant pas, la forme de la projection subsiste. L'effet de symétrie recherché est alors perçu. Lors d'une rotation selon l'axe I, la couleur de l'idéogramme ne change pas (voir chapitre 2.4.5), l'intervalle musical parcouru est une tierce mineure. Une rotation selon l'axe II, correspond à un intervalle d'une tierce majeure (voir tableau 2-19).

Tableau 2-19 : Effet des rotations spatiales simples

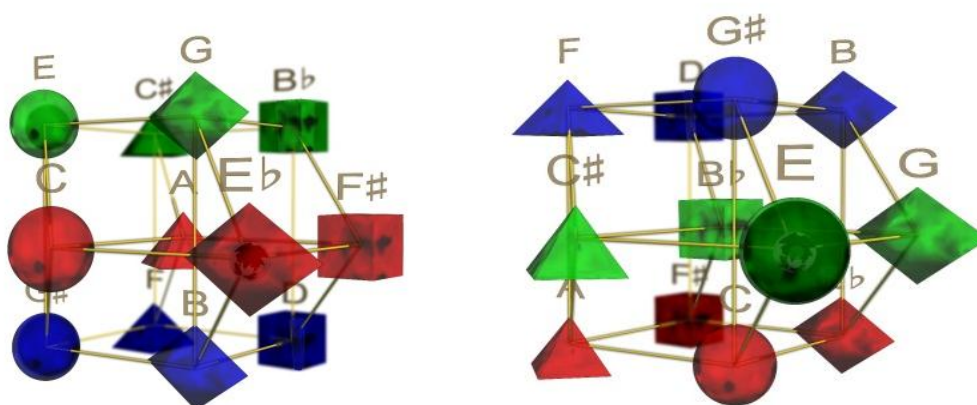
Rotation		Intervalle résultant	
Axe I	Axe II	Symbole	Nom
-1	0	-m3	Tierce mineure descendante
+1	0	+m3	Tierce mineure montante
0	-1	-M3	Tierce majeure descendante
0	+1	+M3	Tierce majeure montante

⁹⁵ L'axe I correspond à la seconde partie du quaternion. Il porte le N°1 car il apparaît graphiquement avant l'axe II. L'axe II passe par le centre des triangles et semble traverser l'écran.

⁹⁶ Dans ce chapitre nous évoquons des rotations autour des axes. Lors de la visualisation, l'observateur est fixe, la sphère qui tourne sur elle-même. Les valeurs des angles ou les effets des rotations sont par conséquent opposées.

Figure 2-46 : Une position de départ en *do* dans *Planet-4D*

L'image ci-dessus (figure 2-46) représente une position de départ en *do*, la figure 2-47 ci-dessous montre le résultat de deux rotations selon chacun des axes à partir d'une position de départ : *do*.

Figure 2-47 : Deux positions possibles après rotation depuis *do*

De même que la rotation d'un cube d'un quart de tour selon l'un de ses axes ne change pas sa projection dans le plan, la forme de la projection 3D du modèle *Planet* ne varie pas, l'enveloppe reste la même, procurant l'impression d'avoir permuté les symboles, sensation analogue à celle de manipuler un Rubik's Cube™.

L'invariance de la forme du modèle est associée à la conservation des relations hiérarchiques entre sommets du modèle⁹⁷.

⁹⁷ Voir l'interprétation musicale du théorème de Noether au chapitre 1.1.4.

2.4.4.2. Rotations combinées

Comme pour le *Tore des tierces*, les cercles chromatiques et cercles des quarts sont sous-jacents au modèle *Planet-4D*. En combinant deux rotations selon chaque axe simultanément, voir tableau 2-20, nous obtenons quatre déplacements possibles.

Tableau 2-20 : Effet des rotations spatiales combinées

Rotation		Intervalle résultant	
Axe I	Axe II	Symbole	Nom
+1	+1	+P5	Quinte ascendante
-1	-1	+P4	Quarte ascendante
+1	-1	-m2	Demi-ton descendant
-1	+1	+m2	Demi-ton ascendant

La combinaison de deux rotations donne l'impression de traverser une face plane du modèle⁹⁸. La figure 2-48 ci-dessous fait apparaître les liaisons entre voisins sur les cercles des quarts (en orange) et sur le cercle chromatique (en bleu).

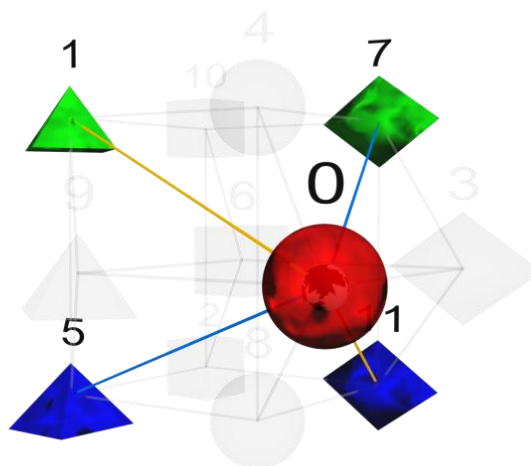


Figure 2-48 : Les cercles chromatiques et cercle des quarts sous-jacents dans *Planet-4D*

2.4.5. Système idéographique

La décomposition de l'espace des hauteurs pouvant être considérée comme le produit de deux groupes cycliques, le *Graphe Planet* étant le produit de deux graphes cycles, nous utilisons une coloration tenant compte de cette décomposition.

⁹⁸ Voir l'animation du modèle en quatre dimensions : Clip F 5 : The *Planet-4D*.

Le modèle *Planet* est intimement lié à sa représentation graphique, nous choisissons un symbole arbitraire pour la représentation de chaque sommet du graphe, symbole qui sera utilisé pour le modèle géométrique. Chaque symbole est un idéogramme matérialisé par une forme et une couleur.

Chaque note appartenant à un seul groupe de trois et à un seul groupe de quatre (voir chapitre 2.2.1, p. 89), nous appliquons la coloration telle que l'appartenance à un groupe de trois se manifeste par une couleur et l'appartenance à un groupe de quatre par une forme. Les paramètres choisis sont arbitraires afin de respecter la règle de l'arbitraire du signe (Saussure & Engler, 1989) et, de manière plus générale, les caractéristiques d'un langage voir introduction (chapitre 1.2.3).

Selon Bertin (Bertin, 1977), les variables visuelles, forme et couleur, permettent la différenciation des objets, la couleur est chargée de signification culturelle. Dans notre cas, nous avons choisi arbitrairement les trois couleurs de base utilisées en infographie (computer graphics), la signification culturelle est très faible. Il n'est pas question d'y voir un rapport synesthésique avec la note signifiée.

2.4.5.1. Interprétations du système idéographique

Le système idéographique s'interprète statiquement de diverses façons : En termes de graphe, il s'agit de coloration par un nombre complexe symbolisant la décomposition $C_3 \square C_4$ (voir chapitre 2.1.6.6).

- Pour le modèle géométrique, ces symboles sont matérialisés par des éléments volumiques de formes et couleurs différentes (voir chapitre 2.2.7.1, tableau 2-13).
- Concernant l'interprétation musicale, le système idéographique illustre la décomposition par tierces majeures et mineures.

Le tableau 2-21 ci-dessous présente différentes interprétations du système idéographique selon le contexte.

Tableau 2-21 : Interprétations contextuelles du système idéographique

Interprétation	a	b
Idéogramme pour la représentation du graphe	Forme	Couleur
Sommets du modèle géométrique		
Notes de musiques	Appartenance à un même accord augmenté	Appartenance à un même accord diminué
	Identification de l'accord diminué	Identification de l'accord augmenté
Décomposition du graphe	Appartenance à un même C_3	Appartenance à un même C_4
	Identification du C_4	Identification du C_3
Modèle géométrique 4D	Appartenance à un même triangle	Appartenance à un même carré
	Position le long d'un carré	Position le long d'un triangle
Rotation 4D	Axe I : θ	Axe II : α
Coloration du graphe par $z = a + ib$	Partie réelle de z : a	Partie complexe de z : b
Coordonnées quaternioniques des sommets du modèle	Terme k' dans $Q(e^{i\frac{2k\pi}{3}}, e^{i\frac{2k'\pi}{4}})$ Pour k' variant de 0 à 3	Terme k dans $Q(e^{i\frac{2k\pi}{3}}, e^{i\frac{2k'\pi}{4}})$ Pour k variant de 0 à 2
Poétique	<i>Saison</i>	<i>Orbite</i>

2.4.5.2. Voisinage et utilisation dynamique

Lorsque le système est utilisé de façon dynamique, un déplacement d'un pas le long du graphe ou du modèle géométrique se traduit par le changement d'un paramètre et la conservation de l'autre (forme ou couleur). Ainsi, les déplacements se font le long d'un C_3 ou d'un C_4 . Dans le modèle géométrique, ils opèrent selon un segment appartenant à l'un des deux plans constitutifs de l'espace 4D. Musicalement, les déplacements se font par tierces mineures ou majeures, un couple de voisins appartenant nécessairement au même accord diminué ou augmenté. La figure 2-49 ci-dessous illustre les changements de paramètres idéographiques selon les deux axes.

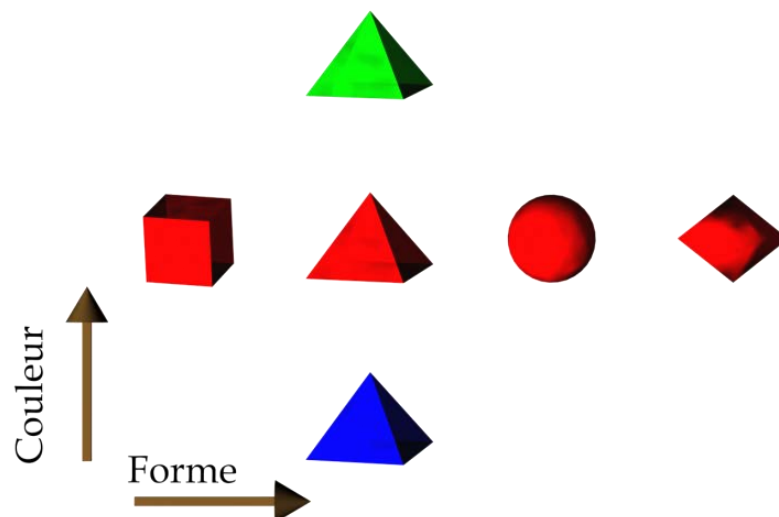


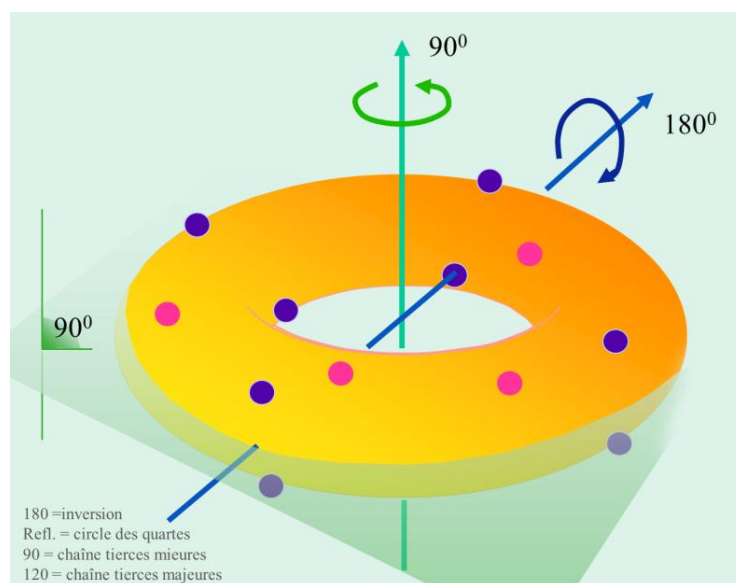
Figure 2-49 : Déplacements et changements d'une dimension idéographique

2.4.6. Tore et symétries

Puisque le *Tore des tierces* et le modèle *Planet* utilisent la même décomposition du système également tempéré à douze notes, ils montrent tous deux la même nature de l'espace des hauteurs. Les fonctionnalités et interprétations sont semblables. La différence apparaît lors de la production du modèle géométrique.

Le modèle *Planet-4D* possède toutes les symétries présentes dans le tore, décrites par Guerino Mazzola (Mazzola, 2002) et reproduites ci-dessous (figure 2-50).

Le modèle *Planet-4D*, grâce à son animation, est, de plus, utilisé de façon dynamique.

Figure 2-50 : Les symétries du *Tore des tierces* de Guerino Mazzola

Les quatre principales symétries du tore, nommées c_1 , c_2 , c_3 et c_4 ⁹⁹, pour lesquelles nous montrons une traduction dans le modèle *Planet-4D* sont indiquées dans le tableau 2-22 suivant.

Tableau 2-22 : Les symétries du tore dans le modèle *Planet-4D*

Tore	<i>Planet-4D</i>
c_1 : rotation de 180° selon un axe traversant (0 – 6)	rotation 180° selon n'importe quel axe (0 – 6) , ou (n – n+6)
c_2 : réflexion selon le plan équatorial	réflexion selon n'importe quel plan contenant un triangle ou un carré
c_3 : rotation de 90° selon l'axe polaire	rotation de 90° selon l'axe perpendiculaire aux carrés
c_4 : inclinaison de 120° selon le cercle central	rotation de 120° selon l'axe perpendiculaire aux triangles

On peut concevoir le tore comme un volume continu, produit de deux cercles. Le modèle *Planet* est un ensemble discret de points en surface d'une hypersphère. Ces deux approches sont complémentaires.

2.4.6.1. Correspondance entre distance physique et distance intervallique

Seule l'hypersphère, où réside le modèle *Planet-4D*, permet d'obtenir cette correspondance. Avec le modèle *Planet-4D*, le spectateur perçoit visuellement de façon équivalente des intervalles musicaux identiques.

La matérialisation d'un tore en trois dimensions est un volume qui ne permet pas d'associer directement distance physique et intervalle musical, le tore ayant un petit et un grand rayon.

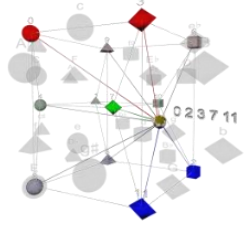
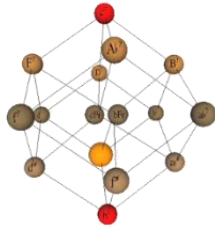
2.4.7. Système discret et espace continu

Le modèle *Planet* propose des positions discrètes pour les notes et les accords dans l'espace à quatre dimensions. Le modèle est issu de la théorie des graphes et nous ne considérons que douze notes. L'espace proposé par Dmitri Tymoczko est un espace continu dont le nombre de dimensions spatiales est le nombre de notes jouées simultanément¹⁰⁰. Le tableau 2-23 ci-dessous propose une comparaison des deux approches qui sont complémentaires.

⁹⁹ Symétries définies dans (Mazzola, 2002). Image issue de (Mazzola, 2005) reproduite avec l'aimable autorisation de l'auteur.

¹⁰⁰ Voir (Tymoczko, 2011), p106.

Tableau 2-23 : Le système *Planet* et l'espace de Tymoczko

	SYSTEME PLANET ANYSET 	ESPACE DE TYMOCZKO 
Topologie du modèle	Ensemble de points discrets situés à la surface d'une hypersphère de dimension 4.	Espace continu, à quatre dimensions, replié sur lui-même ¹⁰¹ .
Bijektivité de la représentation	Les notes et accords parfaits ont une position unique. Une position sur la sphère peut correspondre à deux accords imparfaits différents.	Chaque note ou accord est associé à une position unique.
Système idéographique	Système à deux dimensions provenant de la coloration du <i>Graphe Planet</i> .	Système de coloration à un seul paramètre basé sur la tension dans l'accord.
Visualisation	Seules les notes utilisées sont colorées.	Tous les accords de la région ¹⁰² sont représentés.
	La sphère tourne en 4D alors que l'indicateur de position reste centré en 3D.	L'indicateur de position se déplace dans un tesseract ¹⁰³ fixe projeté en 3D.
	Il n'y a pas de discontinuité dans l'animation.	Pour changer de région, les sommets de l'hypercube sont renommés.
Objectif	Système de visualisation permettant de représenter et détecter les symétries quel que soit le type d'accord.	Description formelle topologique de l'espace des hauteurs.

L'image choisie pour illustrer le système *Planet* est l'*Hypersphère des Accords AnySet* en mode atonal détaillée au chapitre 2.6.5. Pour l'espace de Tymoczko, nous avons choisi un extrait de l'animation du prélude de

¹⁰¹ Nous ne comparons ici qu'avec l'espace 4D. Celui-ci est "replié" par analogie à la bouteille de Klein mais en quatre dimensions.

¹⁰² Une région est une zone tesseractique contenant l'accord en cours. Voir l'illustration dans le tableau ci-dessus.

¹⁰³ Un tesseract, ou octacore, ou 4-cube, est un hypercube à quatre dimensions, son squelette est le graphe Q_4 (voir l'animation Clip 3 : Hypercubes en annexe).

Chopin produite par l'auteur¹⁰⁴, c'est une région de l'espace continu où les accords sont représentés par les sommets d'un tesseract.

Ces deux approches ont des objectifs différents et sont complémentaires.

2.5. GENERALISATIONS DU GRAPHE

En partant de notre modèle défini pour douze notes, nous allons étudier quelques cas plus généraux de graphes à douze sommets ainsi que d'autres décompositions. Pour un graphe général, appliqué à un réseau de tons, nous montrerons l'influence des boucles et de la pondération sur la forme des modèles géométriques correspondants obtenus après projection spectrale.

2.5.1. Cas général circulant à 12 sommets

Nous gardons toujours le système à tempérament égal à douze sons et généralisons le modèle *Planet*.

2.5.1.1. Conditions aux limites

Un graphe à 12 sommets représentant un *Tonnetz* du système également tempéré aura toujours les propriétés indiquées dans le tableau 2-24 suivant.

Tableau 2-24 : Propriétés d'un graphe associé tempérament égal

Propriété musicale souhaitée	Traduction en termes de graphe
Douze notes	Graphe à 12 sommets
Chaque position joue le même rôle	Graphe circulant
Pas de sens de parcours privilégié	Matrice d'adjacence symétrique
Liaisons privilégiées	Pondération des arêtes

Ici, nous ne cherchons plus de décomposition symétrique, nous ne limitons plus le nombre de relations entre les notes, nous autorisons les boucles et le privilège de certaines relations.

En musique il est, par exemple, usuel de donner plus d'importance à une relation de quinte. Le digraphe ne donnant pas toujours de valeurs propres réelles, nous ne pourrions pas visualiser aussi facilement ses sous-

¹⁰⁴ Voir l'animation Clip O 2 : Chopin 4D by Tymoczko, en annexe multimédia, reproduite avec l'aimable autorisation de l'auteur.

espaces propres. Aussi excluons-nous, dans cette étude, le cas des graphes dirigés. La conservation de cette symétrie équivaut à dire que nous considérons toujours qu'un déplacement peut se faire en montant ou en descendant. Le fait de privilégier certaines liaisons, par exemple donner plus d'importance à une quinte (donc par symétrie à une quarte), se traduit par une pondération des arêtes.

Les propriétés du graphe recherché seront les suivantes : pondéré, circulant et symétrique (non dirigé), et à 12 sommets.

Nous retrouvons par conséquent la matrice générale décrite avant la recherche du modèle symétrique au chapitre 2.1.3.2. Dans ce cas, a, b, c, d et e sont des entiers différents et supérieurs à 1.

Le graphe pondéré peut être traduit musicalement par "donner plus d'importance à certains accords ou notes que d'autres".

2.5.1.2. Propriétés spectrales du graphe recherché

La matrice étant circulante, elle peut être définie par les voisins du point 0, noté $V(0)$. Les valeurs propres sont

$$\lambda_j = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^k,$$

avec $\omega_j = e^{i \frac{2j\pi}{12}}$, les douze racines de l'unité (voir plus haut, paragraphe 2.2.4, p. 74).

Toutes les matrices circulantes d'ordre douze possèdent les mêmes vecteurs propres :

$$V_j = (\omega_j^k) \text{ avec } j \text{ variant de } 0 \text{ à } 11.$$

Puisque la ligne 1 est symétrique ($a_{1,j} = a_{1,12-j}$, voir chapitre 2.1.2.6), si le point j est voisin de 0, alors le point $(12 - j)$ est aussi un voisin de 0. Les sommets j et $(12 - j)$ contribuent ensemble à la somme déterminant λ_j .

Comme la matrice est symétrique, ses valeurs propres sont réelles, nous avons, par conséquent :

$$\lambda_j = \lambda_{12-j}.$$

Notre graphe à douze sommets possédera au plus sept valeurs propres distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ et λ_6 , engendrant un nombre maximal de sept sous-espaces propres.

2.5.1.3. Valeurs propres

La première valeur propre calculée est

$$\lambda_0 = \sum_{k \in V(0)} \omega_0^k = \sum_{k \in V(0)} 1 = \deg(G) : \text{le degré des sommets du graphe.}$$

Chaque voisin de 0 ajoute 1 à λ_0 , comme ils apparaissent par couple $(k, n - k)$, chaque couple ajoute 2 à λ_0 , pour k variant de 1 à 5.

Pour le laplacien normalisé, $\alpha_0 = 1 - \frac{\lambda_0}{\deg(G)}$ entraîne $\alpha_0 = 0$.

La dernière valeur propre calculée est

$$\lambda_6 = \sum_{k \in V(0)} \omega_6^k = \sum_{k \in V(0)} (e^{i\frac{2k\pi}{12}}).$$

Chaque voisin de 0 contribuera à λ_6 de la façon suivante :

$$e^{i\frac{2\pi}{12} \cdot 6 \cdot k} = e^{i\pi} = \begin{cases} 1, & \text{si } k \text{ est pair, ou} \\ -1, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Comme chaque voisin apparaît en couple $(k, n - k)$, les voisins distants d'un nombre entier de tons (notes de la même gamme par ton, ou sommets du même graphe cycle C_6) ajouteront 2 à λ_6 .

Les voisins distants d'un nombre fractionnaire de tons (notes de la gamme par ton complémentaire, ou sommets du graphe cycle C_6 complémentaire) enlèveront 2 à λ_6 .

Le point 0 n'est pas considéré comme un voisin, il ajoute 1 à chaque valeur propre.

Le point 6 s'il est voisin ajoutera 1 à λ_6 .

Concernant les autres valeurs propres :

$$\lambda_j = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^k, \text{ avec } k \text{ variant de } 1 \text{ à } 5,$$

comme chaque voisin apparaît en couple $(k, n - k)$, chaque paire contribue à λ_j par

$$(e^{i\frac{2k\pi}{12}(j)} + e^{i\frac{2k\pi}{12}(12-j)}) = \cos\left(\frac{j\pi}{6}\right).$$

Le calcul, non détaillé ici, nécessite des connaissances basiques de trigonométrie.

La formule suivante s'applique aussi à λ_0 et λ_6 :

$$\lambda_j = \lambda_{12-j} = \sum_{k \in V(0)} \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right).$$

Les valeurs propres sont de la forme

$$\lambda_j = a + b\sqrt{3}, \text{ avec } a \text{ et } b, \text{ deux entiers.}$$

2.5.1.4. Vecteurs propres

Les vecteurs propres de la matrice circulante sont ω_j^k avec ω_j , les racines douzièmes de l'unité.

2.5.1.5. Spectre du laplacien normalisé

Les valeurs propres du laplacien normalisé L sont déduites par la formule :

$$\alpha_j = \alpha_{12-j} = 1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_0} = 1 - \frac{1}{\deg(G)} \sum_{k \in V(0)} \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right).$$

Ainsi que pour les λ_i , valeurs propres de la matrice d'adjacence A , les α_i apparaissent par couple et L a les mêmes vecteurs propres que A .

2.5.1.6. Sous-espaces propres

Un sous-espace propre est un espace à n dimensions formé par l'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 apparaissant toujours par deux. Les sous-espaces propres correspondants seront au moins de dimension deux. Les valeurs propres λ_0 et λ_6 peuvent apparaître seules ou associées à une autre valeur propre.

Le couple de vecteurs propres (V_j, V_{12-j}) associé à λ_j , avec j variant de 1 à 5 possède les coordonnées

$$(\omega_j^k, \omega_{12-j}^k)$$

qui peuvent s'écrire

$$(e^{i\frac{2k\pi}{12}(j)}, e^{i\frac{2k\pi}{12}(12-j)}).$$

La norme de chaque vecteur est 12, c'est le nombre de sommets. Afin d'éviter les parties imaginaires, nous substituons à V_j la base W_j telle que :

$$(W_j, W_{12-j}) = ((V_j + V_{12-j}), \frac{1}{i}(V_j - V_{12-j})) \text{ avec } j \text{ variant de 1 à 5.}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} (W_{j,k}, W_{12-j,k}) &= \left((e^{i\frac{2k\pi}{12}(j)} + e^{i\frac{2k\pi}{12}(12-j)}), \left(\frac{1}{i}(e^{i\frac{2k\pi}{12}(j)} - e^{i\frac{2k\pi}{12}(12-j)}) \right) \right) \\ &= \left(2 \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right), 2 \sin\left(\frac{jk\pi}{6}\right) \right). \end{aligned}$$

Nous ne développons pas le calcul, ainsi :

$$W_{j,k} = 2 \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right) \text{ et } W_{(12-j,k)} = 2 \sin\left(\frac{jk\pi}{6}\right).$$

Comme la nouvelle base est construite à partir de deux fois la base originale, on a :

$$\|W_j\|^2 = 2\|V_j\|^2 = 24.$$

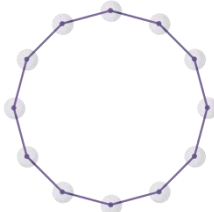
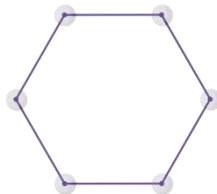
Les vecteurs propres normalisés sont :

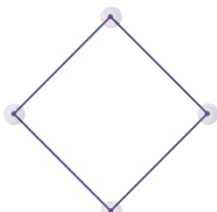
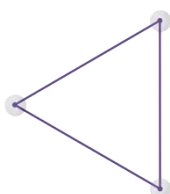
$$\begin{aligned} W_{0,k} &= \frac{1}{\sqrt{12}}, W_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos\left(\frac{jk\pi}{6}\right) \text{ avec } j \text{ variant de 1 à 5, et} \\ W_{6,k} &= \frac{1}{\sqrt{12}} \cos(k\pi). \end{aligned}$$

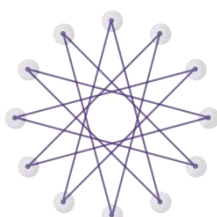

2.5.1.7. Structure des sous-espaces propres

Les sous-espaces propres posséderont ainsi toujours les structures suivantes, représentées dans le tableau 2-25 ci-dessous.

Tableau 2-25 : Liste exhaustive des formes géométriques possibles

Groupe 1 : W ₁ -W ₁₁			Groupe 2 : W ₂ -W ₁₀		
X	Y	Forme	X	Y	Forme
1	0		1	0	
√3/2	1/2		1/2	√3/2	
1/2	√3/2		-1/2	√3/2	
0	1		-1	0	
-1/2	√3/2		-1/2	-√3/2	
-√3/2	1/2		1/2	-√3/2	
-1	0		1	0	
-√3/2	-1/2		1/2	√3/2	
-1/2	-√3/2		-1/2	√3/2	
0	-1		-1	0	
1/2	-√3/2		-1/2	-√3/2	
√3/2	-1/2		1/2	-√3/2	

Groupe 3 : W3-W9			Groupe 4 : W4-W8		
X	Y	Forme	X	Y	Forme
1	0		1	1	
0	1		-1/2	-√3/2	
-1	0		-1/2	-√3/2	
0	-1		1	1	
1	0		-1/2	-√3/2	
0	1		-1/2	-√3/2	
-1	0		1	1	
0	-1		-1/2	-√3/2	
1	0		-1/2	-√3/2	
0	1		1	1	
-1	0		-1/2	-√3/2	
0	-1		-1/2	-√3/2	

Groupe 5 : W5-W7			Groupe 6 : W6	
X	Y	Forme	X	Forme
1	0		1	
-√3/2	1/2		-1	
1/2	-√3/2		1	
0	1		-1	
-1/2	-√3/2		1	
√3/2	1/2		-1	
-1	0		1	
-√3/2	-1/2		-1	
-1/2	-√3/2		1	
0	-1		-1	
1/2	-√3/2		1	
-√3/2	-1/2		-1	

Les sous-espaces propres ne peuvent être que la combinaison de ces formes. Les formes 1 à 5 sont planaires. Une combinaison de deux de ces dernières engendre un espace à quatre dimensions. La forme 6 associée ajoute une dimension à l'espace. Par exemple, le Tonnetz original possède une valeur propre triple, qui engendre un sous-espace propre constitué du

couple de vecteurs (W_2, W_{10}) et du vecteur W_6 . Dans ce cas W_6 apporte la troisième dimension¹⁰⁵.

Chaque couple de vecteurs possède une signification musicale, lorsque les nœuds du graphe sont des notes, elles sont détaillées dans le tableau 2-26 suivant :

Tableau 2-26 : Liste exhaustive des sous-espaces propres possibles

Groupe	Forme	Signification
0 : W_0	Point	Toutes notes confondues
1 : W_1, W_{11}	Dodécagone	Gamme chromatique
2 : W_2, W_{10}	Hexagone	Demi-gamme chromatique (de <i>do</i> à <i>fa</i>)
3 : W_3, W_9	Carré	Suite de tierces mineures
4 : W_4, W_8	Triangle	Suite de tierces majeures
5 : W_5, W_7	Etoile	Cercle des quintes / quarts
6 : W_6	Segment	Deux par gammes par tons

La figure correspondant au groupe 5 possède l'apparence d'une étoile. En intervertissant quelques points sans modifier les liaisons, nous obtenons un dodécagone. L'étoile, ainsi que le dodécagone, sont certes des représentations géométriques équivalentes d'un graphe C_{12} , mais ici, s'agissant déjà d'une projection d'un graphe dans un espace géométrique, il faut conserver cette forme. L'étoile n'est pas totalement isomorphe au dodécagone : ils proviennent d'un même graphe dont les sommets sont étiquetés différemment.

2.5.1.8. Conclusion

La représentation géométrique de n'importe quel espace de hauteurs représentant le système tempéré à douze sons sera constituée des éléments suivants (tableau 2-27).

¹⁰⁵ L'étude spectrale du *Tonnetz* est réalisée au chapitre 3.1.3, p. 147. Il s'agit de l'étude du graphe associé au clavier *Tonnetz*.

Tableau 2-27 : Liste exhaustive des éléments géométriques possibles

Géométrie	Musique
Cercle ou étoile.	Répartition des douze notes selon le cercle chromatique ou le cercle des quintes.
Hexagone	Répartition en deux gammes par ton.
Carré	Répartition en suite de tierces mineures, les tierces majeures étant superposées
Triangle	Répartition par tierces majeures, les tierces mineures étant superposées
Segment	Répartition en deux groupes distincts contenant chacun les notes d'une gamme par ton.

Selon la multiplicité des valeurs propres résultant de la décomposition spectrale du graphe apparaîtront des sous-espaces propres de dimensions différentes, plus ou moins pertinents.

2.5.2. Influence des boucles

Si les nœuds du graphe sont considérés comme des classes hauteurs, dans le cas de représentation statique, une boucle signifie que chaque note est en relation avec elle-même, ce qui n'apporte rien à la compréhension d'un modèle. Par contre, lorsque nous considérons le graphe de façon dynamique dans le cadre de déplacement le long de chemins, une boucle représente un chemin fermé sur le sommet.

Lors de production musicale dynamique, nous assignons selon le cadre, soit une note, soit un accord, ou encore un motif musical à chaque nœud d'un graphe. Chaque nœud représente une transposition ou modulation. Le principe du parcours est de se déplacer le long du graphe de façon régulière : par exemple un accord par mesure. Utiliser une boucle signifiera rester sur le même sommet une mesure de plus.

2.5.2.1. Traduction en termes de graphes

Le graphe étant toujours circulant, une boucle est matérialisée par une valeur sur la diagonale de sa matrice d'adjacence.

Afin de procéder à l'étude spectrale, nous définissons les termes suivants :

- Soit $V(0)$, le voisinage du point 0 dans le cas d'un graphe sans boucles.
- Soit $V'(0)$, le voisinage du point 0 en prenant en compte les boucles.
- Soit d_0 , le terme diagonal correspondant au nombre de boucles d'un sommet.

- Soit λ_j , les valeurs propres du graphe sans boucles et λ'_j , les valeurs propres calculées en tenant compte des boucles.

Nous avons : $V'(0) = V(0) + D(0)$, ce qui donne, pour le calcul des valeurs propres :

$$\lambda'_j = \sum_{k' \in V'(0)} \omega_j^{k'} = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^k + d0 = \lambda_j + d0,$$

$$\lambda'_j = \lambda_j + d0.$$

La présence de boucles dans un graphe circulant ajoute un terme sur la diagonale et augmente chaque valeur propre λ_j du nombre de boucles utilisées.

La multiplicité des valeurs propres n'étant pas changée, les valeurs propres du laplacien normalisé étant déduites des valeurs propres de la matrice de façon linéaire, la multiplicité de ces dernières est inchangée.

Les décompositions en sous-espaces propres étant identiques, les possibles représentations géométriques seront les mêmes.

2.5.2.2. Conclusion

Ajouter des boucles au graphe ne change pas la décomposition en sous-espaces propres, ce qui signifie que le musicien utilisera par conséquent le même modèle géométrique.

L'arrêt sur une position pourra être considéré de deux façons suivantes :

- le parcours fait une pause le long d'un chemin sur un graphe sans boucle, ou
- le graphe possède des boucles et la même position peut être répétée.

Les deux manières de procéder étant équivalentes concernant le modèle géométrique, il est indifférent d'écrire le parcours en spécifiant un nombre de répétitions d'un accord ou de l'écrire plusieurs fois, ceci est illustré dans la grille suivante (figure 2-51).

Type de graphe	Grille				
Avec boucles	<i>do</i>	<i>ré</i>	<i>ré</i>	<i>ré</i>	<i>mi</i>
Sans boucles	<i>do</i>	<i>ré</i>			<i>mi</i>

Figure 2-51 : Deux grilles équivalentes pour les graphes avec ou sans boucles



Figure 2-52 : Deux partitions équivalentes pour les graphes avec ou sans boucles

La figure 2-52 ci-dessus montre à gauche une partition n'utilisant qu'une valeur de quantification (la noire), correspondant à un graphe avec

boucles et intervalle de temps constant. La partition de droite représente la même séquence, en utilisant un graphe sans boucle et un pas de temps variable.

2.5.3. Influence du triton

Nous sommes dans le cas d'une matrice à douze sommets circulante et symétrique : c'est-à-dire que les nœuds du graphe sont interprétés comme des classes de hauteurs, les intervalles musicaux étant considérés dans les deux directions. Si, par exemple, la quarte est complémentaire de la quinte : le triton est son propre complémentaire.

2.5.3.1. Traduction en termes de graphes

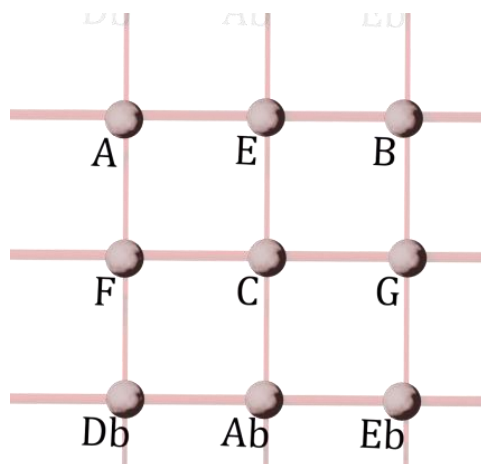
Le graphe étant toujours circulant, la matrice étant symétrique, ses valeurs propres seront réelles. La contribution de la liaison au triton pour chaque valeur propre λ_j , est de la forme $\omega_j^6 = e^{ij\pi}$. Ce terme prend la valeur 1 ou -1 . Il change par conséquent la multiplicité des valeurs propres et, ainsi, la décomposition en sous-espaces propres. Le modèle géométrique en sera affecté. Les valeurs propres restant réelles, la construction d'un modèle géométrique est possible. La liaison au triton dans le graphe engendre toujours une dimension supplémentaire pour le modèle géométrique.

2.5.3.2. Conclusion

Il était intuitivement prévisible que l'ajout d'une liaison au triton changeât la forme du modèle géométrique. Si nous restons dans une décomposition par douze, les modèles seront toujours constitués des éléments décrits au paragraphe (2.5.1.7), l'ajout d'un triton change la sélection des formes élémentaires qui composent le modèle géométrique.

2.5.4. Influence de la pondération

Pondérer signifie donner plus d'importance à une relation, par exemple privilégier la quinte à la tierce. Lorsque les nœuds du graphe sont considérés comme des classes hauteurs, dans le cas de représentation statique de l'espace des hauteurs, nous matérialisons les pondérations par la largeur du trait.

Figure 2-53 : Un exemple de *Tonnetz* pondéré

Lors de production musicale, en suivant un parcours généré en temps réel par l'ordinateur, celui-ci privilégiera un axe de déplacement. Comme notre graphe n'est pas orienté, les deux directions d'un axe de déplacement sont équivalentes. Un axe à deux directions est, par exemple, l'axe quinte-quarte. Voir figure 2-53, pour un exemple de *Tonnetz* pondéré et voir chapitre 3.3.3, pour l'étude du graphe pondéré des parents proches chez Weber.

2.5.4.1. Traduction en termes de graphes

Le graphe étant toujours circulant, la pondération se matérialise par un coefficient plus grand que 1 dans la matrice d'adjacence. En réutilisant la notation précédente, nous avons maintenant :

$$\lambda_j = \sum_{k \in V(0)} \omega_j^k \text{ et } \lambda'_j = \sum_{k' \in V'(0)} \omega_j^{k'}.$$

Dans ce cas, les voisinages étant différents, la pondération agit sur tous les termes de la somme. Il n'y a généralement pas de relation directe entre les valeurs propres du graphe pondéré et celles du graphe simple.

La multiplicité des valeurs propres étant différente, les valeurs propres du laplacien normalisé étant déduites des valeurs propres de la matrice de façon linéaire, il en résulte que la décomposition en sous-espaces propres sera différente.

2.5.5. Conclusion

Les modèles géométriques sont toujours constitués des mêmes formes élémentaires détaillées au paragraphe 2.5.1.7.

Modifier une liaison change la structure des sous-espaces propres, y compris pour l'ajout d'une liaison vers le triton.

En général, la pondération modifiant la décomposition en sous-espaces propres, le modèle géométrique sera différent. Le musicien utilisera le même graphe, mais pas le même modèle géométrique.

Pour les cas où la pondération ne modifie pas la décomposition, le modèle géométrique reste le même.

Nous avons vu précédemment (Chapitre 2.1.5.2) que la génération originelle de \mathbb{Z}_{12} ne modifie pas la structure du graphe. Ainsi, deux graphes pondérés où l'ordre des sommets est généré par le cycle des quartes ou chromatiquement auront la même structure de sous-espaces propres.

2.6. ACCORDS ET HYPERSPHERES

Un accord est un ensemble de notes jouées simultanément. Nous considérons ici les sommets du modèle *Planet-4D* exclusivement comme des classes de hauteurs et cherchons à représenter des accords dans cet espace. L'accord, agrégat de notes, sera positionné en fonction des sons qui le composent. Nous utiliserons l'approche traditionnelle basée sur le *Tonnetz* et son espace dual permettant de représenter 24 accords de trois sons, puis nous généraliserons le principe afin de proposer une représentation de n'importe quel assemblage de notes sur l'hypersphère.

2.6.1. Système idéographique à trois dimensions

Les idéogrammes utilisés dans cette recherche comportaient jusqu'à présent deux dimensions : forme et couleur (voir chapitre 2.1.8, concernant la coloration du graphe).

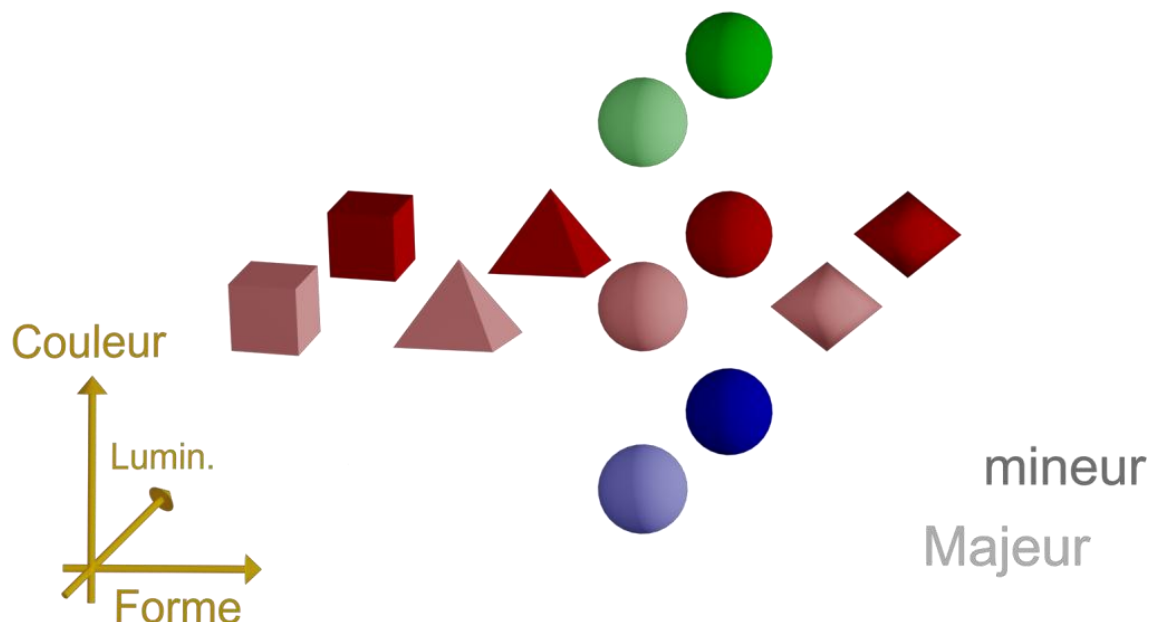


Figure 2-54 : Les trois dimensions idéographiques pour les accords parfaits

Afin de différencier les différents types d'accords, nous introduisons une troisième dimension idéographique. En musique, le mode mineur invoque généralement la mélancolie alors que le mode majeur est utilisé pour symboliser la gaieté. Nous choisissons arbitrairement d'utiliser des

couleurs sombres pour les accords mineurs et des couleurs claires pour les accords majeurs¹⁰⁶ (voir ci-dessus, figure 2-54).

Ce système est adapté aux accords parfaits. Il n'a plus de sens dans le cas d'accords tonals quelconques ou dans un cadre atonal (voir l'*Hypersphère Généralisée AnySet* décrite plus bas au chapitre 2.6.5). Nous vérifions que ce système idéographique respecte les critères d'un langage exposés au chapitre 1.2.3.

2.6.2. Approche traditionnelle : l'espace dual

En considérant un réseau de tons comme un graphe où les sommets sont des notes, nous pouvons définir un espace dual qui représente des accords. Le *Tonnetz* original relie entre elles les classes de hauteurs distantes d'une tierce mineure, tierce majeure ou quarte. En plaçant au centre de chaque triangle dont les sommets sont les classes de hauteurs un accord parfait, nous obtenons son espace dual.

L'espace dual du *Tonnetz* se représente généralement en deux dimensions. Voir ci-dessous en figure 2-55, la représentation de Julian Hook¹⁰⁷ qui indique les transformations P,L,R¹⁰⁸. Cette représentation fait suite à celle de Brian Hyer (Hyer, 1995). S'agissant d'un pavage¹⁰⁹, on peut dessiner cet espace sur un tore. Les modèles toroïdaux représentant les relations entre tonalités¹¹⁰ dessinés en 2D et 3D par Hendrick Purwins (Purwins, 2005) citant Krumhansl et Kessler (Krumhansl & Kessler, 1982), peuvent aussi être représentés sur une hypersphère, parallèlement au modèle *Planet-4D*¹¹¹.

¹⁰⁶ Parmi les "variables visuelles" définies par Jacques Bertin (Bertin, 1977), nous traduisons la notion originale de "valeur" par "luminosité", terme plus usuel en vidéo. La notion de luminosité me fut suggérée parallèlement par le peintre Charles Giulioi (entretien avec l'artiste juin 2009).

¹⁰⁷ Issue de (Hook, 2006) reproduite avec l'aimable autorisation de l'auteur.

¹⁰⁸ Voir (Lewin, 1987).

¹⁰⁹ En considérant le *Tonnetz* comme un graphe planaire infini correspondant à un pavage périodique du plan, on obtient un "graphe de Cayley dessinaable sur le tore" (Delorme & Heydemann, 2002).

¹¹⁰ Modèles TOMIR (Toroïdal Models of Inter-Key Relations), voir (Purwins, 2005).

¹¹¹ Voir aussi le modèle en spirale de Elaine Chew tenant compte des différents octaves (Chew, 2000). Et les "Représentation harmonique hexagonale toroïde" de Jean Marc Chouvel (Chouvel, 2005). Ces deux systèmes fonctionnent en temps réel.

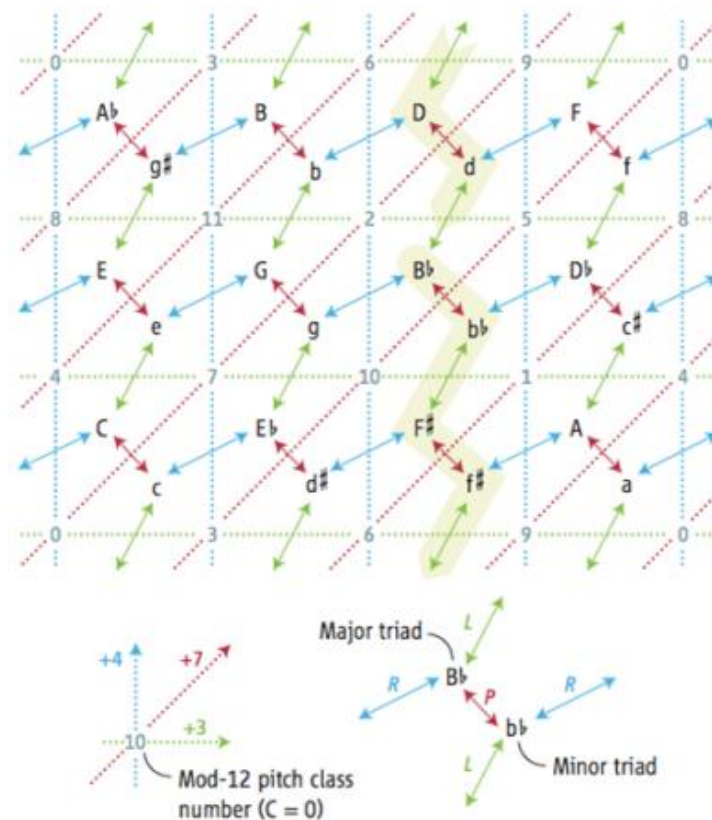


Figure 2-55 : Le réseau hexagonal de Julian Hook

Nous avons re-colorisé le *Tonnetz* en utilisant les idéogrammes du système *Planet* décrits au chapitre précédent (2.6.1) (voir figure 3-22, p. 170).

Les éléments représentés sont les douze notes (ou classes de hauteurs) et les vingt-quatre accords parfaits de trois sons. Soit douze notes, douze accords majeurs et douze accords mineurs.

Pour passer d'une représentation du *Graphe Planet* à une du *Tonnetz*, il suffit de rajouter des liaisons entre quintes, (voir figure 2-56). La ligne est violette pour ne pas la confondre avec une liaison originale du *Graphe Planet*¹¹².

En deux dimensions, dans l'espace dual, les accords majeurs et mineurs sont placés au centre de chaque face¹¹³.

¹¹² Il s'agit seulement de dessiner graphiquement la liaison vers la quinte afin de représenter les accords parfaits en s'inspirant des travaux existants, pas de briser la symétrie de notre modèle.

¹¹³ Comme nous travaillons en quatre dimensions, le "centre de chaque face", n'est pas le barycentre des trois points, mais un point à la surface de l'hypersphère (voir chapitre 2.6.3.)

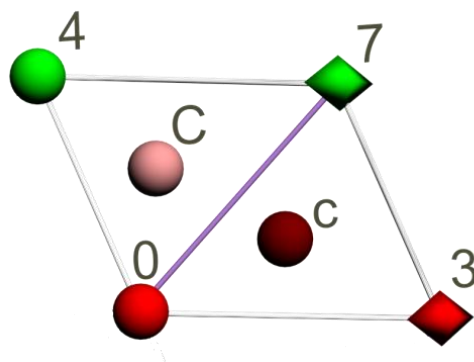


Figure 2-56 : Le placement des accords parfaits dans un réseau à deux dimensions

Dans l'exemple illustré ci-dessus, l'accord de *do majeur*, noté "C", est placé graphiquement au centre d'une face délimitée par les points {0,7,4} correspondant aux notes le constituant {*do*, *mi*, *sol*}. L'accord de *do mineur* noté "c" {*do*, *mi*^b, *sol*} est matérialisé sur la face voisine.

Nous procédons de manière analogue en plaçant chaque symbole d'accord au centre de la projection 3D du triangle formé par ses trois notes. Ce placement 3D fait suite à la projection de 4D vers 3D du modèle *Planet*, il n'est donc pas rigoureusement incontestable. Sachant que les spectateurs ne sont pas forcément habitués à voir en quatre dimensions, mais familiers de la construction traditionnelle de l'espace dual dans le plan, la justification de cette représentation est d'ordre didactique¹¹⁴.

2.6.3. Accords parfaits sur l'hypersphère

Nous allons ici calculer les positions exactes des accords parfaits dans l'espace du modèle *Planet* à quatre dimensions.

Le barycentre de trois points symbolisant trois notes leur est coplanaire. Dans un espace comportant plus de deux dimensions, le barycentre de trois points situés sur la surface d'une sphère est situé à l'intérieur de cette sphère et non à sa surface. Pour pouvoir positionner un accord sur la sphère, il convient de réunir les conditions suivantes : le point se trouve à la surface de la sphère et le rayon le traversant passe par le barycentre des trois points. L'illustration graphique (figure 2-57) est réalisée en trois dimensions pour une lecture plus facile qu'en hyperspace.

¹¹⁴ Nous verrons au chapitre 3.5 qu'elle est bien adaptée à la visualisation de musique composée d'accords parfaits. Notamment avec les exemples "Beethoven and the Hypersphere" et "Hamiltonian Path on the Hypersphere".

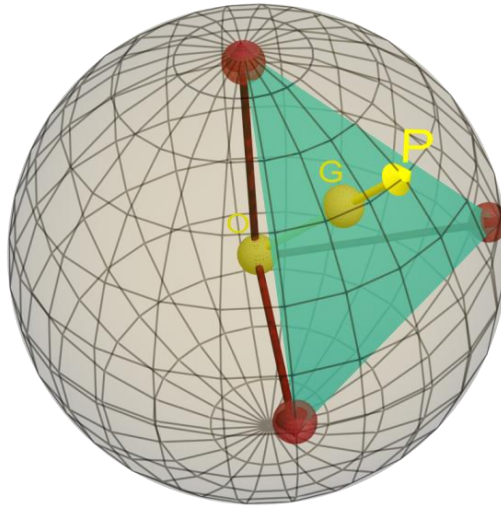


Figure 2-57 : Le centre du triangle à l'intérieur d'une sphère

Le fait de travailler en quatre dimensions facilite les calculs. En effet, comme nous utilisons des quaternions formés de deux complexes orthogonaux exprimés en coordonnées polaires, il suffit de calculer les deux angles principaux du quaternion puis de fixer ses normes dans chacun des sous-espaces 2D.

Les points symbolisant les accords majeurs et mineurs sont situés sur la surface de l'hypersphère. Cette dernière étant générée par deux cercles situés dans des plans perpendiculaires, le quaternion recherché appartiendra aussi à ces deux cercles. Les coordonnées des notes (voir chapitre 2.3.2) sont générées par

$$Q \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2n\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2n\pi}{4}} \right), \text{ avec } n \in (0, 1, \dots, 11).$$

Pour le point symbolisant l'accord majeur de fondamentale n généré par n , avec $n \in (0, 1, \dots, 11)$, le rayon le traversant passe par le barycentre G_{Mn} , des points $\{n, n+4, n+7\}$ correspondant aux trois notes d'un accord majeur. Les coordonnées du barycentre sont ¹¹⁵:

$$G_{Mn} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2n\pi}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2(n+4)\pi}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i \frac{2(n+7)\pi}{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2n\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2(n+4)\pi}{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \frac{2(n+7)\pi}{4}} \right).$$

La figure 2-58 suivante représente sur un plan la position des accords majeurs et mineurs par rapport aux points symbolisant les notes. L'axe horizontal correspond à une position le long du premier cercle générant l'hypersphère. L'axe vertical indique la position le long du second cercle. Les deux axes sont représentés par la figure 2-45 au chapitre 2.4.4.1. Nous déterminons les coordonnées des accords par rapport à leur fondamentale selon les deux rotations. Ceci correspond aux moyennes des angles en coordonnées polaires, la norme d'un quaternion associé à un accord est la même que celle d'un quaternion associé à une note.

¹¹⁵ Seuls les termes angulaires nous intéressent car la norme recherchée est la même que celle des quaternions représentant les notes. Nous obtenons les coordonnées des quaternions Q_M symbolisant les douze accords majeurs d'indice n à partir des coordonnées du quaternion associé à la note n par rotation selon les deux axes principaux de l'hypersphère.

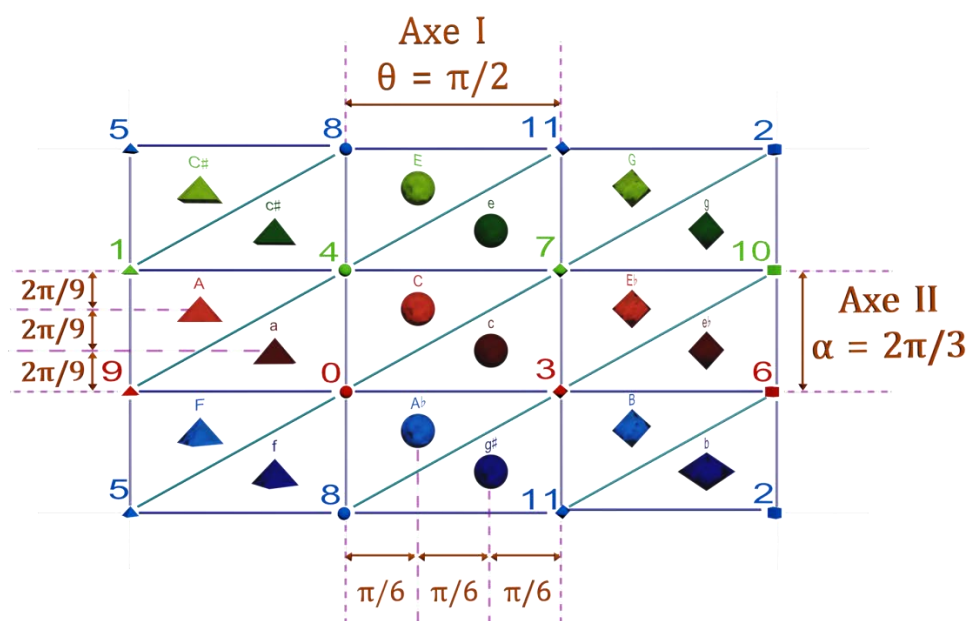


Figure 2-58 : Les positions angulaires des accords parfaits sur l'*Hypersphère* en vue 2D

A partir d'une fondamentale correspondant à un sommet sur le modèle *Planet-4D*, nous positionnons les accords parfaits de la façon suivante :

- L'accord majeur par une rotation de $\frac{-\pi}{6}$ selon l'axe I combinée à une rotation de $\frac{4\pi}{9}$ selon l'axe II.
- L'accord mineur par une rotation de $\frac{-\pi}{3}$ selon l'axe I combinée à une rotation de $\frac{2\pi}{9}$ selon l'axe II.

La figure ci-dessous illustre les deux rotations effectuées pour positionner les accords majeurs et mineurs sur l'hypersphère.

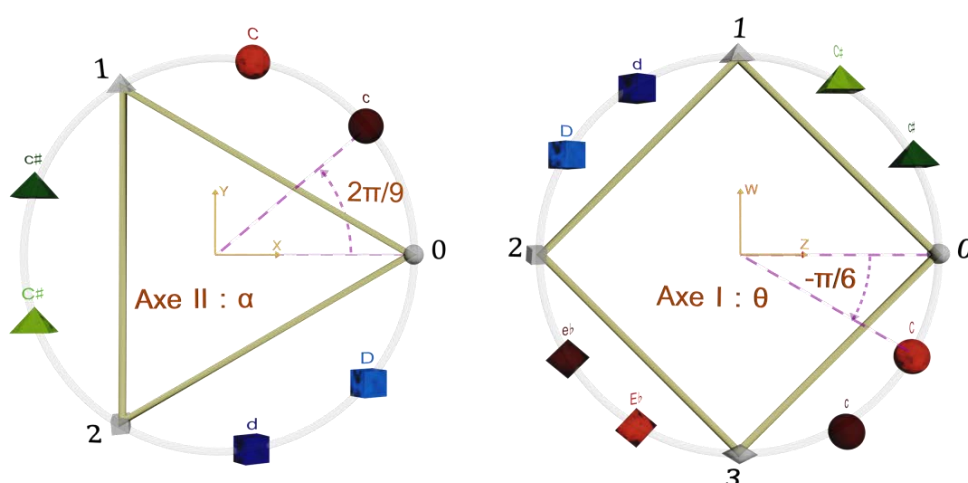


Figure 2-59 : Deux coupes planes perpendiculaires de l'*Hypersphère* contenant la note *do* (0)

Par simple rotation des quaternions autour de l'origine¹¹⁶, nous obtenons alors les coordonnées suivantes pour les accords majeurs :

$$Q_M \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i(\frac{4\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3})}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{4})} \right), \text{ avec } n \in (0, 1, \dots, 11).$$

Et pour les accords mineurs :

$$Q_m \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3})}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{4})} \right), \text{ avec } n \in (0, 1, \dots, 11).$$

Ces coordonnées seront utilisées pour placer les symboles des accords parfaits sur l'hypersphère.

2.6.4. Propriétés de l'*Hypersphère des Accords*

Comme nous utilisons le *Tonnetz* au tempérament égal et son espace dual de la même façon que dans la théorie néo-riemannien, l'*Hypersphère des Accords* présente les mêmes propriétés musicales que les modèles graphiques 2D ou les tores 3D existants calculés dans ces conditions. Seule la représentation spatiale est originale.

Bien que son système idéographique en soit indissociable, le modèle *Planet-4D* peut être appelé par analogie : *Hypersphère des Tierces*, son espace dual étant l' *Hypersphère des Accords*.

2.6.4.1. Rotations

Afin d'en apprécier la symétrie, comme nous l'avons fait pour le modèle *Planet-4D*, l'*Hypersphère des Accords* est mise en mouvement : combinaisons de rotations en quatre dimensions autour de son centre. Entre deux accords de trois sons majeurs et mineurs qui ne diffèrent que d'une note, la théorie transformationnelle de David Lewin définit les transformations suivantes¹¹⁷ :

- P, (Parallèle) : relie deux triades de même fondamentale mais de mode opposé, par exemple *do majeur* et *do mineur*.
- L, (Leading Tone) : la fondamentale est remplacée par sa sensible, par exemple *do majeur* vers *mi mineur*.
- R, (Relatif) : lie deux accords relatifs, par exemple *do majeur* et *la mineur*.

Ces transformations sont obtenues par rotation de l'hypersphère. Le tableau suivant indique les effets des rotations combinées pour quelques passages d'accords pertinents : transformations PLR, enchaînement par quinte ou quarte, modulations à la tierce majeure ou mineure et triton (voir le tableau 2-28 suivant).

¹¹⁶ C'est l'origine du repère cartésien et le centre de l'hypersphère.

¹¹⁷ Voir les définitions de David Lewin (Lewin, 1987), détaillées par (Hyer, 1995).

Tableau 2-28 : Effet des rotations spatiales combinées

Rotation		Transformation résultante	
Axe I (θ)	Axe II (α)	Transformation	Exemple
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{9}$	P	$C \rightarrow c^-$
$+\frac{\pi}{6}$	$+\frac{2\pi}{9}$	P	$c^- \rightarrow C$
$-\frac{\pi}{6}$	$+\frac{4\pi}{9}$	L	$C \rightarrow e^-$
$+\frac{\pi}{6}$	$-\frac{4\pi}{9}$	L	$c^- \rightarrow A^b$
$+\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{9}$	R	$C \rightarrow a^-$
$-\frac{\pi}{3}$	$+\frac{2\pi}{9}$	R	$c^- \rightarrow E^b$
$+\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$V \rightarrow I$	$G \rightarrow C$
$+\frac{\pi}{3}$	$-\frac{8\pi}{9}$	$V \rightarrow I^-$	$G \rightarrow c^-$
$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{2\pi}{3}$	$IV \rightarrow I$	$F \rightarrow C$
$-\frac{\pi}{6}$	$+\frac{8\pi}{9}$	$IV^- \rightarrow I$	$f^- \rightarrow C$
$+\frac{\pi}{2}$	0	$+3^{ce} \text{ min}$	$C \rightarrow A ; c^- \rightarrow a^-$
$-\frac{\pi}{2}$	0	-3^{ce} min	$C \rightarrow E^b ; c^- \rightarrow e^b-$
0	$+\frac{2\pi}{3}$	$+3^{ce} \text{ maj}$	$C \rightarrow E ; c^- \rightarrow e^-$
0	$-\frac{2\pi}{3}$	-3^{ce} maj	$C \rightarrow A^b ; c^- \rightarrow a^b-$
π	0	Triton	$C \rightarrow F^\# ; f^- \rightarrow f^\#-$

Cette liste n'est pas exhaustive, nous avons listé les transformations les plus courantes en musique tonale.

2.6.4.2. Distances physiques entre accords

Nous calculons ici toutes les distances possibles entre deux accords parfaits situés sur l'*Hypersphère des Accords*. Les accords majeurs ou mineurs étant répartis entre eux comme les sommets du modèle *Planet-4D*, la table des distances entre accords de même type est celle calculée lors de l'étude des propriétés géométriques du modèle *Planet-4D* (voir chapitre 0). La distance utilisée est la distance carrée.

Nous utilisons les coordonnées des accords majeurs et mineurs calculés plus haut (chapitre 2.6.3) et obtenons la matrice des distances suivantes, voir tableau 2-29, ci-dessous.

Tableau 2-29 : Distances carrées entre accords de types différents

	Accords mineurs											
	c	db	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	b
C	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051
Db	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159
D	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656
Eb	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685
E	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793
F	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022
F#	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051
G	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656	1.427
G#	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417	0.656
A	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793	2.417
Bb	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290	2.793
B	2.793	2.417	0.656	1.427	2.051	2.022	1.793	0.685	1.656	3.159	1.051	0.290

Les couleurs permettent de différencier les valeurs, repérer les doublons et visualiser les symétries. Cette matrice est circulante, symétrique par rapport à sa diagonale secondaire, il n'y a pas de valeurs multiples sur une même ligne. En reprenant les distances entre majeurs qui sont celles internes au modèle *Planet-4D* et en les combinant avec celles calculées ci-dessus, nous classons tous les accords en fonction de leur distance par rapport à *do majeur*.

En classant les accords par rapport à leur distance depuis *do majeur* nous avons les distances carrées suivantes :

{C:0.000 ; c:0.290; e^b:0.656; g[#]:0.685 ; A:1.000 ; E:1.000; E^b:1.000; G[#]:1.000; b:1.051; e:1.427; a:1.656; g:1.793; F:2.000; F[#]:2.000; C[#]:2.000; G:2.000; B:2.000; f[#]:2.022; f:2.051; d:2.417; c[#]:2.793; D:3.000; B^b:3.000; b^b:3.159}.

Les valeurs entières pour les distances carrées sont celles constatées entre accords de même type. Ainsi *do majeur* est à distance carrée 3 de *ré majeur*, ce qui correspond à la diagonale d'une face cubique de côté 1. Le rayon de l'*Hypersphère des Accords* n'est pas unitaire¹¹⁸.

Il n'y a pas d'accords parfaits diamétralement opposés en quatre dimensions. En effet, en coupant l'*Hypersphère* selon ses deux plans

¹¹⁸ Nous avons requis au chapitre 2.2.7 que les côtés des triangles et ceux des carrés soient unitaires.

principaux¹¹⁹, dans le plan laissant apparaître les triangles un accord n'a pas d'accord opposé. L'accord opposé dans le plan des carrés est son triton mais il n'est pas opposé dans le second plan.

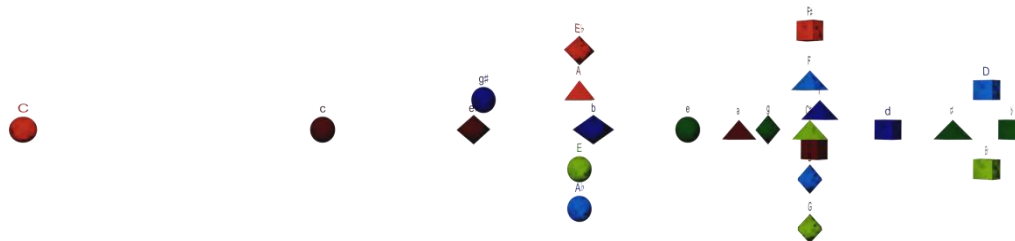


Figure 2-60 : Représentation des distances euclidiennes depuis *do majeur*

Dans figure 2-60 ci-dessus, nous avons représenté la distance euclidienne par rapport à *do majeur* uniquement. Bien entendu, cette illustration ne peut pas représenter les distances entre autres accords car leurs coordonnées sont 4D dans leur espace d'origine. Certains symboles sont écartés de l'axe horizontal dans le but de les distinguer, seule l'abscisse est importante dans cette représentation.

La figure 2-61 ci-dessous indique les distances par rapport à un accord mineur : l'image est similaire.

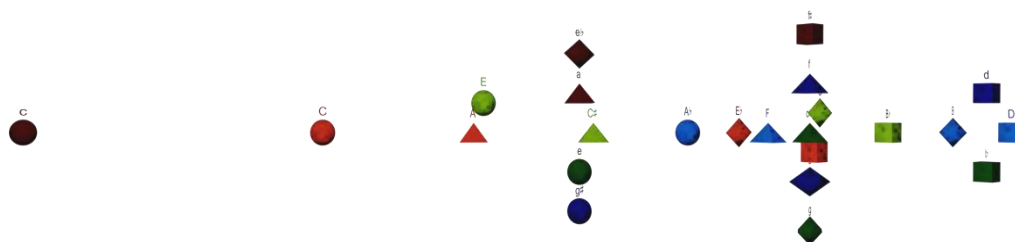


Figure 2-61 : Représentation des distances euclidiennes depuis *do mineur*

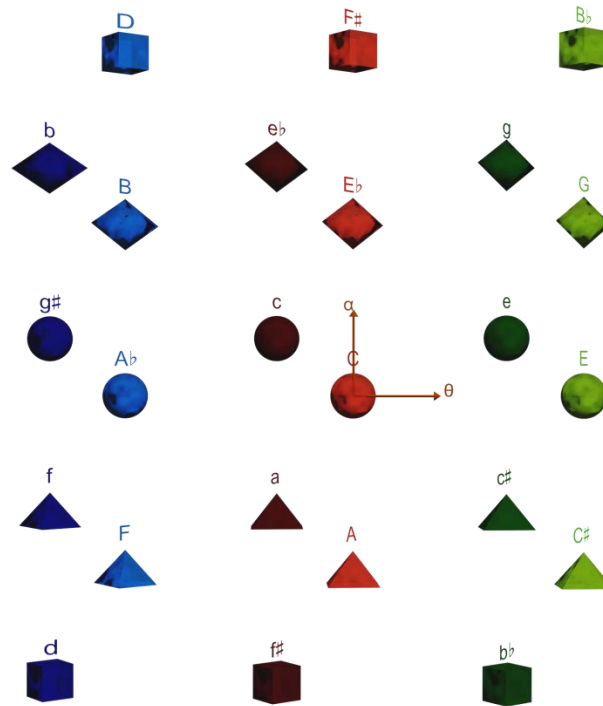
En utilisant la distance euclidienne dans le modèle de l'*Hypersphère des Accords*, les accords proches sur le dessin ne sont pas les plus proches harmoniquement¹²⁰.

2.6.4.3. Distances angulaires entre accords

Nous avons déterminé plus haut (chapitre 2.6.4.1) les effets de rotations combinées de l'*Hypersphère* selon ses deux axes principaux pour les changements d'accords. Nous étudions ici la question réciproque : pour passer d'un accord à un autre, quelles sont les rotations nécessaires ?

¹¹⁹ Voir ci-dessus Figure 2-59 : Deux coupes planes perpendiculaires de l'Hypersphère contenant la note *do* (0) Figure 2-59.

¹²⁰ Les accords les plus proches de C sont {c, e b, g[#]}, les plus proches de c sont {C, E, A}.

Figure 2-62 : Les rotations θ et α présentées sur un plan

L'espace utilisé est 4D, les quaternions sont définis comme couple de deux complexes. Pour passer d'une position sur la sphère à une autre¹²¹, nous effectuons deux rotations combinées, une dans chaque plan complexe.

Soient θ et α les angles de rotations selon les axes I et II définis au paragraphe 2.6.4.1. Soient :

$$\theta_n = \frac{4\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} \text{ et } \alpha_n = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{4}, \text{ pour les accords majeurs, ou bien}$$

$$\theta_n = \frac{2\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} \text{ et } \alpha_n = -\frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{4}, \text{ pour les accords mineurs,}$$

avec $n \in (0, 1, \dots, 11)$, le numéro de la classe de hauteur fondamentale de l'accord.

Nous définissons pour deux accords X et Y de coordonnées polaires (θ_x, α_x) et (θ_y, α_y) , les distances angulaires suivantes :

$$d_1(x, y) = |\theta_n - \theta_0| + |\alpha_n - \alpha_0| : \text{la distance angulaire Manhattan}^{122}.$$

$$d(x, y) = \sqrt{(\theta_n - \theta_0)^2 + (\alpha_n - \alpha_0)^2} : \text{la distance angulaire euclidienne.}$$

$$d^2(x, y) = (\theta_n - \theta_0)^2 + (\alpha_n - \alpha_0)^2 : \text{la distance angulaire carrée.}$$

Ces distances sont définies par analogie avec les distances usuelles dans le plan, en remplaçant dans les définitions habituelles les coordonnées planaires (x, y) d'un point par les coordonnées bi-polaires (θ, α) d'un quaternion. Le concept de "distance angulaire" n'est pas

¹²¹ Ou bien tel que nous le mettons en pratique : laisser tourner la sphère, le spectateur restant immobile.

¹²² Par analogie à la distance à parcourir pour aller d'un point à un autre de Manhattan en suivant des routes orthogonales.

une distance au sens mathématique du terme. En effet, les angles sont définis modulo 2π et nous travaillons avec leur valeur principale comprise entre $-\pi$ et π . Les distances angulaires ne respectent pas l'inégalité triangulaire, que ce soit en deux dimensions ou plus.

La distance Manhattan est appropriée lorsque la sphère tourne alternativement selon les deux axes ; la distance euclidienne est analogue à une distance orthonormique sur la terre ; la distance carrée permet d'obtenir des valeurs entières ou rationnelles.

Le système étant circulant, il suffit de calculer les distances par rapport à un accord de référence. Nous prenons comme référence *do majeur* (C ; $n = 0$; $\theta_0 = \frac{4\pi}{9}$ et $\alpha_0 = -\frac{\pi}{6}$). Les distances deviennent :

$d_1 = |\theta_n - \theta_0| + |\alpha_n - \alpha_0|$: la distance angulaire Manhattan par rapport à C.

$d = \sqrt{(\theta_n - \theta_0)^2 + (\alpha_n - \alpha_0)^2}$: la distance angulaire euclidienne par rapport à C.

$d^2 = (\theta_n - \theta_0)^2 + (\alpha_n - \alpha_0)^2$: la distance angulaire carrée par rapport à C.

Les résultats sont présentés dans le tableau 2-30 suivant :

Tableau 2-30 : Distances angulaires sur l'*Hypersphère des Accords*

Accord	Note	Type	$\Delta\alpha/\pi$	$\Delta\theta/\pi$	d_1	d^2	d	a
C	0	min	0	0	0.0000	0.0000	0.0000	0
c	0	maj	2/9	1/6	0.3889	0.0772	0.2778	25
a	9	maj	2/9	-1/3	0.5556	0.1605	0.4006	52
e	4	maj	-4/9	1/6	0.6111	0.2253	0.4747	73
EB	3	min	0	1/2	0.5000	0.2500	0.5000	81
A	9	min	0	-1/2	0.5000	0.2500	0.5000	81
c#	1	maj	-4/9	-1/3	0.7778	0.3086	0.5556	100
E	4	min	-2/3	0	0.6667	0.4444	0.6667	144
G#	8	min	2/3	0	0.6667	0.4444	0.6667	144
eb	3	maj	2/9	2/3	0.8889	0.4938	0.7027	160
g	7	maj	-4/9	2/3	1.1111	0.6420	0.8012	208
C#	1	min	-2/3	-1/2	1.1667	0.6944	0.8333	225
F	5	min	2/3	-1/2	1.1667	0.6944	0.8333	225
G	7	min	-2/3	1/2	1.1667	0.6944	0.8333	225
B	11	min	2/3	1/2	1.1667	0.6944	0.8333	225
f#	6	maj	2/9	-5/6	1.0556	0.7438	0.8625	241
g#	8	maj	8/9	1/6	1.0556	0.8179	0.9044	265
b	10	maj	-4/9	-5/6	1.2778	0.8920	0.9444	289
f	5	maj	8/9	-1/3	1.2222	0.9012	0.9493	292
F#	6	min	0	1	1.0000	1.0000	1.0000	324
bb	11	maj	8/9	2/3	1.5556	1.2346	1.1111	400
D	2	min	2/3	1	1.6667	1.4444	1.2019	468
BB	10	min	-2/3	1	1.6667	1.4444	1.2019	468
d	2	maj	8/9	-5/6	1.7222	1.4846	1.2184	481

Les colonnes $\Delta\alpha/\pi$ et $\Delta\theta/\pi$ indiquent les différences angulaires par rapport à chacun des axes principaux. Les unités sont les fractions de π .

La colonne d_1 indique la distance angulaire Manhattan.

Les valeurs des colonnes d^2 , d et a sont issues de la distance euclidienne ; avec $a = d^2 * 18^2$, coefficient permettant d'obtenir des entiers pour faciliter la lecture. Les valeurs sont classées par distance euclidienne croissante. La représentation colorée en dégradé nous indique visuellement que le classement de proximité avec la distance d_1 diffère de celui obtenu avec d . En considérant d_1 , l'ordre de classement serait :

$\{C; c; A; E^b; a; e; E; G^\sharp; c^\sharp; e^b; F^\sharp; f^\sharp; g^\sharp; g; C^\sharp; F; G; B; f; b; b^b; D; B^b; d\}$.

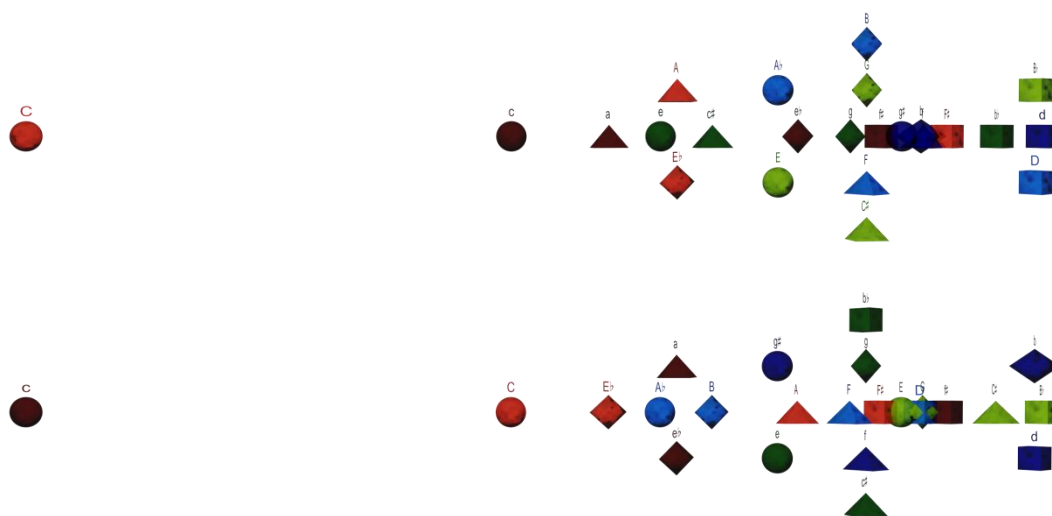


Figure 2-63 : Proximité des accords depuis *do majeur* et *do mineur* en distance euclidienne

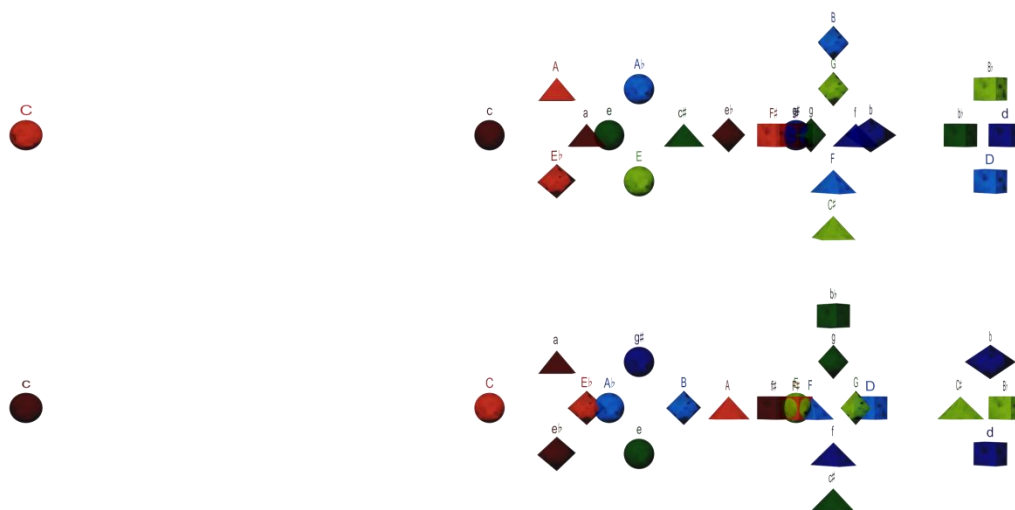


Figure 2-64 : Proximité des accords depuis *do majeur* et *do mineur* en distance Manhattan

Dans les images ci-dessus (figure 2-63 et figure 2-64), la partie supérieure de chaque illustration concerne la distance par rapport à *do majeur*, la partie inférieure, la distance par rapport à *do mineur*. Les rapports de distance sont les mêmes que dans le monde physique. Cette représentation ne permet pas de visualiser d'autres distances que depuis *do* : les coordonnées des accords étant 4D dans l'espace de départ. Certains

symboles sont écartés de l'axe horizontal dans le but de les distinguer, seule l'abscisse est importante dans cette représentation.

Avec les distances Manhattan ou euclidienne, les mêmes types de voisins sont superposés, la distance euclidienne d laisse apparaître comme plus proches les trois accords voisins dans le *Tonnetz*. Cette métrique donne un résultat analogue à celui trouvé par Emmanuel Amiot employant une méthode utilisant les coefficients de Fourier¹²³.

2.6.4.4. Avantages de l'*Hypersphère des Accords*

Nous représentons l'espace dual du *Tonnetz* sur cette *Hypersphère* au lieu de le faire sur un tore. C'est le modèle *Hypersphère Tonnetz* présenté au chapitre 2.6.2. En plaçant les accords parfaits sur la sphère nous obtenons l'*Hypersphère Généralisée* définie au chapitre 2.6.3. Par rapport à une illustration 2D ou 3D, les représentations des accords parfaits sur une sphère 4D présentent les atouts suivants :

- Tous les accords de même mode forment un modèle 4D isomorphe au modèle *Planet 4-D* : les accords majeurs ou mineurs forment entre eux aussi un modèle à douze points isomorphe au *Planet-4D*.
- Par rapport à un tore, la représentation sur la sphère conserve l'invariance des distances spatiales. Les distances entre accords parfaits peuvent, comme pour le tore, être calculées soit en pas sur le graphe soit en nombre de rotations.
- Les trois accords les plus proches physiquement sont les trois voisins de l'espace dual du *Tonnetz*.
- L'utilisation d'un système idéographique à trois dimensions¹²⁴ permet d'associer visuellement les accords. Les symboles voisins ne diffèrent que d'un paramètre.
- Avec notre méthode de visualisation en quatre dimensions, l'indicateur de position est fixe. C'est l'univers qui tourne autour.

2.6.5. L' *Hypersphère Généralisée AnySet*

Nous avons précédemment positionné des accords majeurs et mineurs à trois sons sur la surface de l'*Hypersphère* comme barycentres sphériques des trois points d'un accord parfait : la fondamentale, la tierce et la quinte. Par analogie nous plaçons maintenant n'importe quel accord de n sons en fonction des notes qui le constituent. La représentation graphique associée est baptisée *Hypersphère Généralisée AnySet*.

¹²³ Résultat démontré récemment, en cours de publication (Amiot, 2011).

¹²⁴ Il s'agit des dimensions idéographiques : forme, couleur et luminosité.

2.6.5.1. Position d'un accord quelconque

Nous avons matérialisé la liaison vers la quinte par analogie avec la construction habituelle de l'espace dual du *Tonnetz* afin de séparer visuellement les accords majeurs des mineurs. Cette ligne est désormais inutile pour le positionnement d'un accord quelconque ou parfait car ceux-ci sont placés en coordonnées polaires sur la sphère. L'angle 4-D (2x2D) de l'accord est la moyenne des angles des notes composant l'accord¹²⁵. La norme de son quaternion est la même que celle des notes.

Comme nous travaillons dans \mathbb{Z}_{12} , c'est-à-dire que nous ne considérons que des classes de hauteurs, il est clair que nous ne différencions pas la position des renversements¹²⁶.

D'autre part, ce modèle n'est pas bijectif : deux accords différents peuvent être positionnés au même point si la moyenne quaternionique des notes le composant est identique, c'est le cas par exemple de $C^\Delta \{0,4,7,11\}$ et du doublet *mi-sol* $\{4,7\}$.

La position des accords parfaits sur l'*Hypersphère Généralisée AnySet* est la même que sur l'*Hypersphère Généralisée*. Les accords non parfaits qui n'étaient pas compris dans le modèle hypersphérique précédent¹²⁷ peuvent maintenant avoir une position définie.

2.6.5.2. Cas des accords tonals proches d'un accord parfait

Certains accords sont proches harmoniquement d'un accord majeur ou d'un accord mineur ; c'est le cas de $C^7 \{do, mi, sol, si^b\}$ ou $C^\Delta \{do, mi, sol, si\}$ proches de $C \{do, mi, sol\}$. Ils sont aussi proches géométriquement de C . Pour la représentation sur l'hypersphère, nous utiliserons dans ce cas le symbole sphérique rouge clair de l'accord de *do majeur* (C).

2.6.5.3. Accords remarquables

Nous montrons ici de façon non exhaustive la position sur l'*Hypersphère Généralisée* de quelques accords connus. Le tableau suivant indique le contenu des accords, leurs positions angulaires θ et α ainsi que la distance angulaire euclidienne à la note *do* (point 0) (voir la définition plus haut, au chapitre 2.6.4.3).

Dans le tableau 2-31 suivant, les notes sont classées telles qu'elles apparaissent dans l'accord. Par exemple C^{79} s'écrit $\{0, 3, 5, 10, 2\}$ soit {tonique, tierce, quinte, septième, neuvième}.

¹²⁵ La moyenne angulaire n'étant pas définie de façon absolue, nous choisissons, parmi les modules, l'angle pour lequel la somme des déplacements est minimum. Par exemple, pour le cas des angles $\{+\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\}$ dont la moyenne est 0 modulo π , nous choisissons π .

¹²⁶ L'accord à trois sons $Do^6 \{do, mi, la\}$ sera positionné comme un *la mineur* non renversé $\{la, do, mi\}$. Ceci est inhérent à la *Set Theory*. Bien que leur position sur la sphère soit identique, il est possible d'assigner un idéogramme différent à Do^6 et *la mineur*.

¹²⁷ Ils n'étaient pas non plus présents dans l'espace dual du *Tonnetz*.

Tableau 2-31 : Positions de quelques accords remarquables

Element		contient	θ	α	d
Notes	do	0	0.00	0.00	0
	mi \flat	3	0.00	0.50	0.5
	mi	4	0.67	0.00	0.667
	sol	7	0.67	0.50	0.833
Accords de Do	C	0 4 7	0.50	0.15	0.521
	C ⁵	0 7	0.33	0.25	0.417
	C-	0 3 7	0.17	0.35	0.390
	C ⁷	0 4 7 10	0.56	0.25	0.614
	C ⁻⁷	0 3 7 10	0.33	0.50	0.601
	C ^{Δ}	0 4 7 11	0.67	0.25	0.712
	C ^{-Δ}	0 3 7 11	0.00	0.40	0.398
	C ⁷⁹	0 4 7 10 2	0.67	0.50	0.833
	C ⁻⁷⁹	0 3 7 10 2	0.33	0.65	0.728
	C ^{sus4}	0 5 7 0	0.00	0.00	0
	C ^{9#}	0 3 4 7	0.33	0.25	0.417

Pour un accord "a" nous associons le quaternion Q_a :

$Q_a = (\frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\theta}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha})$, avec θ et α , les moyennes angulaires des notes composant l'accord selon les deux axes du modèle. L'illustration suivante (figure 2-65) montre les positions angulaires calculées et présentées dans le tableau 2-31 ci-dessus.

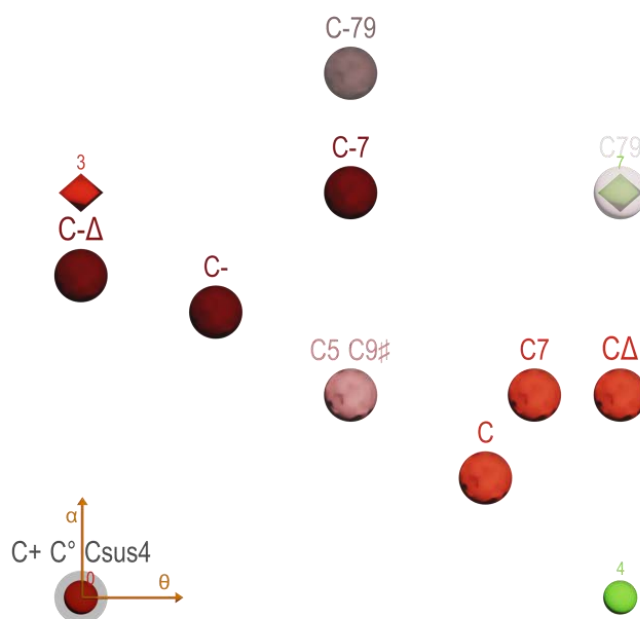


Figure 2-65 : Les positions angulaires de quelques accords remarquables

Cette représentation n'est pas une projection exacte 2D de l'*Hypersphère des Accords*, bien que l'on puisse la voir comme telle¹²⁸. Les axes des abscisses et ordonnées indiquent les positions angulaires θ et α calculées des accords. Avec l'*Hypersphère des Accords Parfaits*, nous notons *do mineur "c"* afin de ne pas surcharger les images. Ici nous avons utilisé la notation Jazz pour tous les accords. Nous retrouvons la position remarquable de l'accord C^Δ évoquée plus haut entre les notes 4 et 7, ainsi que celle attendue de l'accord majeur-mineur : au centre de la figure. Les accords $C^{\text{sus}4}$ et $C^{9\#}$ n'étant ni majeurs ni mineurs, ils sont dessinés en rose arbitrairement. Les accords symétriques C° , C^+ et $C^{\text{sus}4}$, dont la position ne peut être déterminée comme la moyenne des quaternions les composant (voir chapitre suivant), sont représentés en gris, superposés à la note 0. Enfin, l'accord remarquable de $C^{79} \{0,3,7,10,2\}$ est centré musicalement et géométriquement sur *sol* (note 7).

2.6.5.4. Singularités

En plaçant un accord de façon angulaire comme la moyenne des angles des notes le constituant, l'accord est en général sur la sphère. Les limitations de ce concept sont de deux ordres :

1. La moyenne de plusieurs quaternions n'est pas toujours unique¹²⁹.
2. Une des deux coordonnées complexes du quaternion résultant est au centre d'un des deux cercles.
 - Deux notes dont la projection est opposée : triton $\{0,6\}$.
 - Trois notes dont la projection forme un triangle : $\{0,4,8\}$ ou $\{0,4,2\}$.
 - Trois notes dont la projection forme un carré : $\{0,3,6,9\}$ ou $\{4,3,6,9\}$.

¹²⁸ On ne peut pas projeter une surface sphérique sur un plan sans distorsion.

¹²⁹ Il convient de bien préciser que la moyenne de quaternions ne conserve pas leur norme, mais qu'elle est bien évidemment unique lorsque ceux-ci sont définis comme quadruplet de réels. Cependant, dans cette étude, les quaternions sont définis par une norme et deux coordonnées polaires, nous sommes dans un cas analogue à celui traité par F.Landis Markley, traitant de "*répartition de quaternions sur l'hypersphère unité*" dans le cadre des vols spatiaux. Pour les conditions et limites de l'unicité et la moyenne de ces quaternions, voir (Markley, Cheng, Crassidis, & Oshman, 2007).

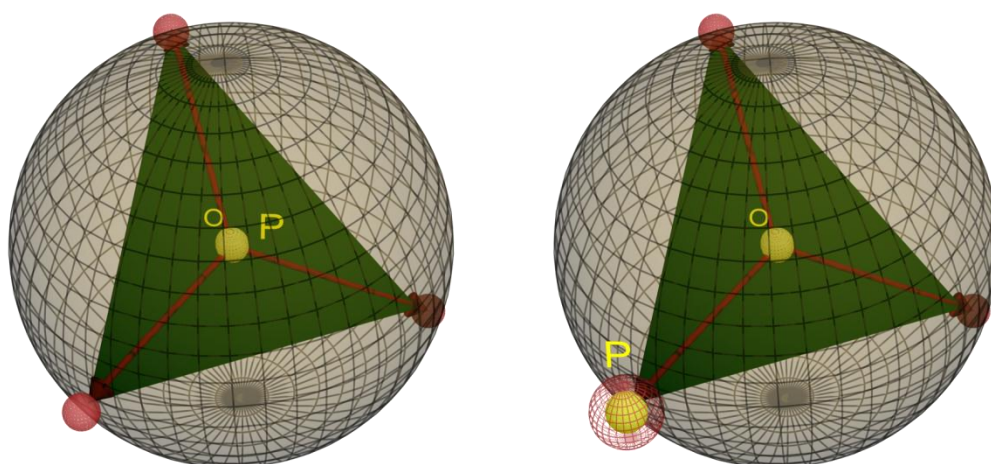


Figure 2-66 : Un contournement de singularités

Sur la figure 2-66 ci-dessus, l'image de gauche montre que le point P, matérialisant la position de l'accord singulier ne peut pas être sur la sphère. Si nous ajoutons une note n à l'accord, (symbolisée ici par une sphère rouge plus grosse), l'accord est superposé à la note n, sur la sphère¹³⁰.

Dans un cadre tonal, nous ajoutons la fondamentale de l'accord. Par exemple si l'agrégat de notes $\{do, mi, sol\}$ a pour fondamentale *do*, nous utilisons $\{do, do, mi, sol\}$ soit $\{0,0,4,8\}$ et l'accord sera placé sur le sommet représentant la note *do* : le point "0" du modèle *Planet-4D*.

Dans un cadre atonal, il faut soit briser l'atonalité en forçant une fondamentale, soit représenter le point dans l'hypersphère. Le système de visualisation choisi étant "point focal fixe et rotations de la sphère", un point au centre ou à l'intérieur de l'*Hypersphère* perturberait la perception du spectateur.

2.6.5.5. Centre de l'accord

Le barycentre sphérique ne correspond pas toujours à la note centrale de l'accord. Prenons par exemple le couple $\{1, 5\}$. Musicalement, la note centrale est 3. (ou son triton : 9). Ceci se voit sur un cercle. En utilisant l'espace à quatre dimensions ($2 \times 2D$), le barycentre sphérique calculé n'est pas le point 3. En effet, dans le premier sous-espace, les points 1 et 5 sont superposés, le centre leur sera aussi superposé. Mais dans le second sous-espace, 1 et 5 ont pour coordonnées angulaires $+\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ dont la moyenne arithmétique est 0 (c'est le point 3), mais la moyenne angulaire que nous retenons en minimisant les déplacements est π , ce qui ne correspond pas à une note du modèle¹³¹.

¹³⁰ Pour une meilleure lisibilité, le cas est illustré en 3D.

¹³¹ Même si pour certains cas particuliers la moyenne arithmétique des angles donnerait un résultat musicalement plus correct, nous conservons la moyenne angulaire qui minimise les déplacements et améliore la lisibilité du modèle 4D.

Le centre calculé est matérialisé par une croix, figure 2-67 ci-dessous.

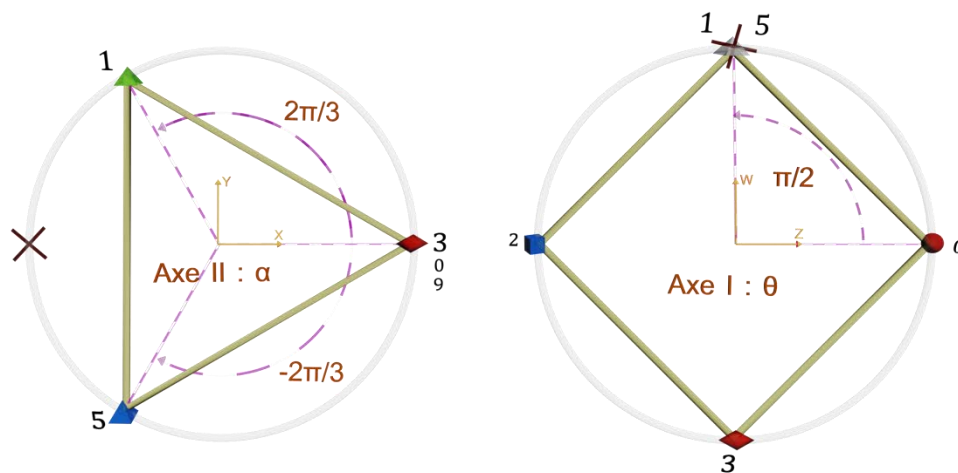


Figure 2-67 : La position du centre de l'accord {1,5}

2.6.5.6. Particularité du cadre atonal

L'*Hypersphère des Accords Généralisée AnySet* ne permet pas de découvrir de nouveaux mécanismes dans la musique tonale mais de les visualiser. Bien qu'il soit mathématiquement possible de représenter n'importe quel agrégat de notes sur cette sphère, la réalité musicale devrait connaître une limite concernant la pertinence du nombre de notes simultanées.

Dans un cadre atonal, les fonctions harmoniques ne sont plus présentes, nous considérons un ensemble de notes jouées simultanément comme un accord atonal. Comme les composantes de l'accord atonal sont par définition sans relation à une tonalité, nous n'employons plus de symbole pour matérialiser la position harmonique même si nous rencontrons le cas d'un ensemble de notes pouvant être interprété comme un accord parfait.

2.6.5.7. Concernant la visualisation

La sphère tournante reste centrale, les douze notes sont visibles avec le modèle *Planet-4D*, une ligne est tracée depuis la sphère centrale vers chacune des douze classes de hauteur (voir ci-dessous figure 2-68). Seules les notes utilisées et les lignes les reliant à la sphère centrale sont mises en couleur. Les accords parfaits sont représentés grisés et très transparents pour conserver l'impression de sphère. L'effet de perspective 3D est exagéré afin de voir simultanément toutes les notes et de donner une apparence visuelle plus importante aux notes les plus proches¹³².

¹³² La sphère est projetée de façon cavalière de 4D vers 3D, la caméra utilisée pour produire l'image 2D utilise ensuite un grand angle. Nous modifions les paramètres visuels associés à la "variable visuelle : dimension du plan" de Bertin (Bertin, 1977).

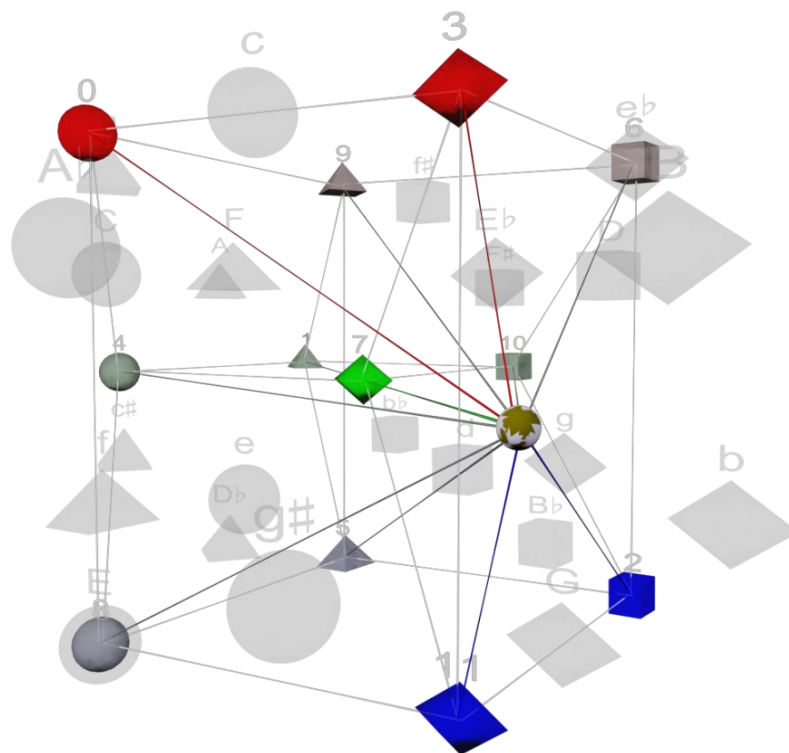


Figure 2-68 : L'Hypersphère Généralisée AnySet en mode atonal

2.7. CONCLUSIONS

Dans un cadre musical, à partir de conditions aux limites basées sur la symétrie et les propriétés d'un espace de hauteurs, nous avons recherché un graphe respectant ces conditions. Ce graphe baptisé "*Graphe Planet*" est un cas particulier de graphe circulant, il fait état des relations entre tierces majeures et tierces mineures seulement.

L'analyse de ce graphe par la méthode de la projection spectrale du laplacien normalisé a permis de le calculer, puis de le visualiser par projection selon ses différents espaces propres. Ce sont ces projections qui sont les représentations géométriques du modèle recherché. Nous avons choisi un espace de projection en quatre dimensions et y avons placé les douze classes de hauteur.

Ce modèle géométrique associé à un système idéographique original est baptisé *Planet-4D*. C'est une alternative aux représentations existantes. Chaque sommet peut être, selon le contexte, considéré comme un objet musical adapté : note, gamme ou accord. En considérant les sommets comme des classes de hauteurs, nous avons construit un espace d'accords en utilisant la démarche traditionnelle, puis en utilisant une moyenne de quaternions.

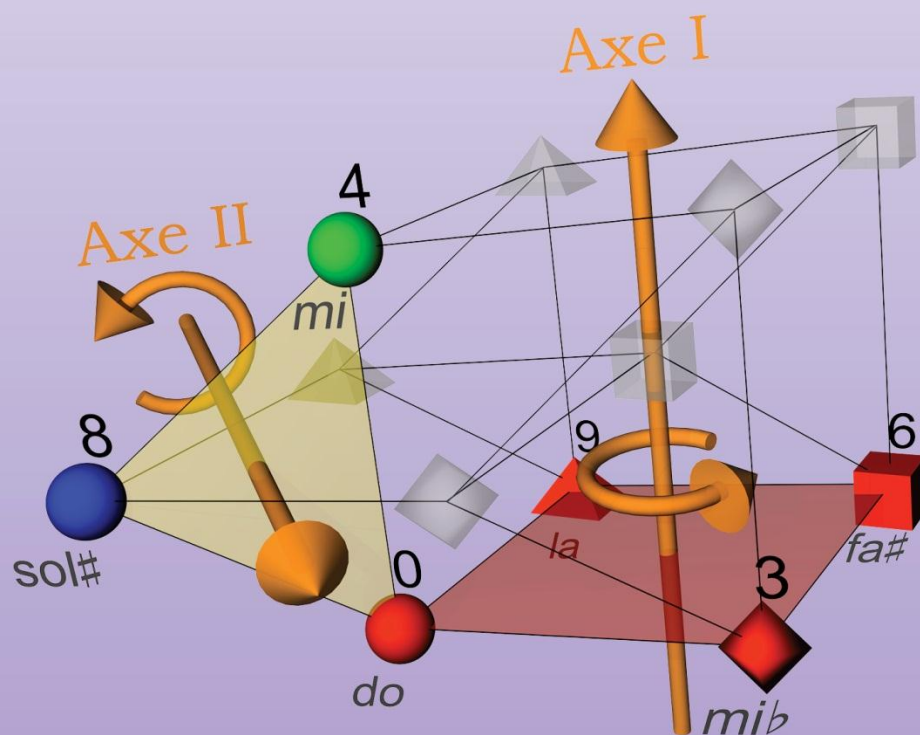
Pour l'*Hypersphère Généralisée AnySet*, les accords parfaits sont sur la surface et leur position est le barycentre sphérique des quaternions constitutants.

Les calculs de distances angulaires indiquent que les accords les plus proches d'un majeur ou d'un mineur donné sont les accords issus des transformations P,L,R de la théorie néo-riemannienne.

Plusieurs accords peuvent avoir la même position sur l'*Hypersphère Généralisée*, et certains accords doivent être forcés sur la surface afin de ne pas changer le principe de visualisation 4D où le spectateur est fixe dans un univers en mouvement.

Des analyses spectrales et visualisations d'autres objets musicaux sont présentées au chapitre suivant. Les applications musicales des modèles *Planet-4D*, *Hypersphère des Accords* et *Hypersphère Généralisée AnySet* sont présentées dans la troisième partie de ce mémoire (chapitre3.5).

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

Applications mathématiques

Cadre

Nous utilisons dans ce mémoire, le terme analyse pour l'étude mathématique des relations harmoniques et ne prenons pas en compte les aspects sensibles des œuvres étudiées comme le ferait une analyse au sens musicologique du terme.

Nous allons analyser d'une part des objets musicaux avec la théorie spectrale des graphes, et, d'autre part, analyser des œuvres musicales avec les modèles géométriques inventés.

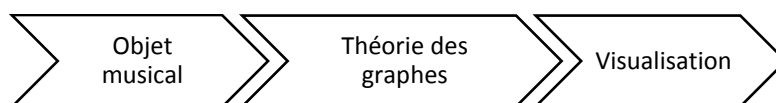
La méthode de projection dans les espaces propres que nous avons utilisée afin d'interpréter notre *Graphe Planet* et d'analyser ses différentes représentations va maintenant être appliquée à des modèles de représentation déjà connus. Dans un premier temps, nous chercherons à visualiser de façon originale -indépendante de la musique et de l'interprète - des objets musicaux.

Nous étudierons plusieurs exemples de claviers, dont celui du piano et différents claviers d'accordéon¹³³. En traduisant les relations de proximité des touches en termes de graphe que nous projeterons, des structures et symétries apparaîtront. Par la suite, nous effectuerons les études spectrales de graphes bien connus dans le monde des mathémusiens. D'abord des réseaux de notes, puis d'accords. Le but est d'en visualiser, de façon géométrique, les propriétés intrinsèques pas toujours évidentes au premier coup d'œil. Nous passerons enfin d'une analyse de graphe à une analyse de *graphes de graphes* afin de faire apparaître les propriétés spectrales.

Enfin, nous proposerons des analyses d'œuvres musicales, choisies pour leur pertinence, à l'aide des systèmes de visualisation originaux créés ici. Ces analyses sont classées par complexité de la représentation visuelle.

Outils utilisés

Nous allons considérer les représentations existantes (*Tonnetze*, claviers ou espaces d'accords) comme des graphes, les analyser et en observer les différentes projections.



Nous utiliserons les logiciels suivants :

*Excel*TM pour la génération des matrices d'adjacence ainsi que l'écriture automatique des scripts 3D et *Mathematica*TM pour les calculs des spectres. L'intérêt de l'automatisation est, outre le gain de temps, la fiabilité du calcul.

L'étude principale approfondie du *Graphe Planet* fut effectuée de façon littérale. Le résultat obtenu avec *Mathematica*TM pour l'étude de ce graphe est suffisamment juste pour nous autoriser à valider notre script de décomposition spectrale. Suite à la démonstration littérale pour le cas général circulant à douze sommets (chapitre 2.5.1), les calculs spectraux

¹³³ Le clavier est un objet indépendant de l'interprète, situé au cœur de la relation physique entre le musicien et l'instrument. Nous étudions la disposition des touches sur ces interfaces afin d'essayer d'en déceler les symétries.

ses gammes afin de pouvoir jouer dans plusieurs tonalités¹³⁶. La transposition d'une mélodie sur un clavier de piano implique que la suite des déplacements des doigts s'adapte. En revanche, le guitariste peut transposer sa mélodie sans changer les mouvements de ses doigts en utilisant un capodastre de même que l'accordéoniste (muni du clavier à boutons) ne modifie que la position de départ et répète le même doigté. Par analogie à la théorie des graphes nous disons que le clavier du piano n'est pas "circulant".

Afin de nous placer dans le cadre de la *Set Theory*, nous considérons que le piano est accordé au tempérament égal, et que son clavier est cyclique. Nous créons un graphe de la façon suivante :

le graphe comporte 12 sommets représentant les classes de hauteurs. Deux sommets sont voisins si les touches du piano correspondantes sont voisines, ainsi la touche *do* est voisine de $\{do^\sharp, ré, si\}$. Les voisins de 0 sont $\{1,2,11\}$. Les voisins de chaque note étant au maximum distant de 2, le graphe associé au clavier du piano est inclus dans le *Web*¹³⁷ W_{12}^3 . Nous remarquons que ce graphe n'est pas sans-griffe.

Nous obtenons le graphe et sa matrice d'adjacence suivants :

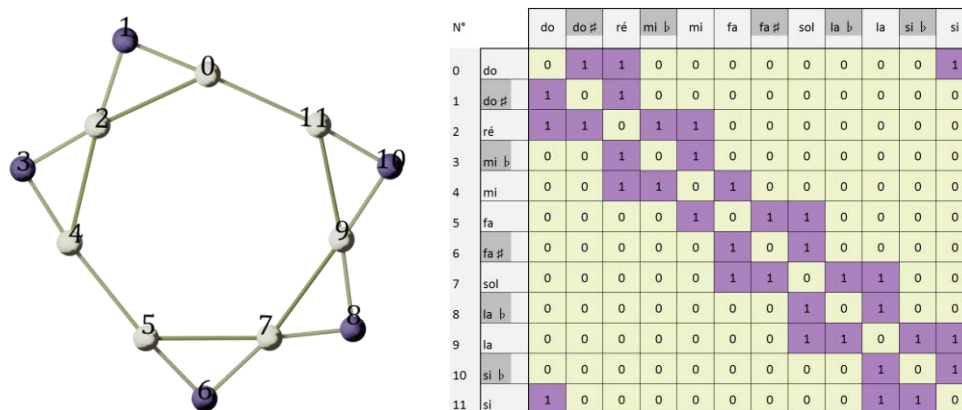


Figure 3-2 : Le graphe et la matrice associés au clavier du piano

C'est un graphe planaire, non circulant. La matrice d'adjacence étant non circulante, les calculs ont été réalisés de façon numérique.

Le spectre du laplacien normalisé possède des valeurs propres multiples :

$$\{1.6219, 1.6139, 1.5^3, 1.2461, 1.2155, 0.736, 0.6246, 0.2654, 0.1589, 0\}.$$

Le tableau 3-2 suivant présente le résultat numérique de la projection spectrale.

¹³⁶ Celui qui ne connaît pas les notes sait que pour jouer "au clair de la lune" il faut commencer par la bonne touche.

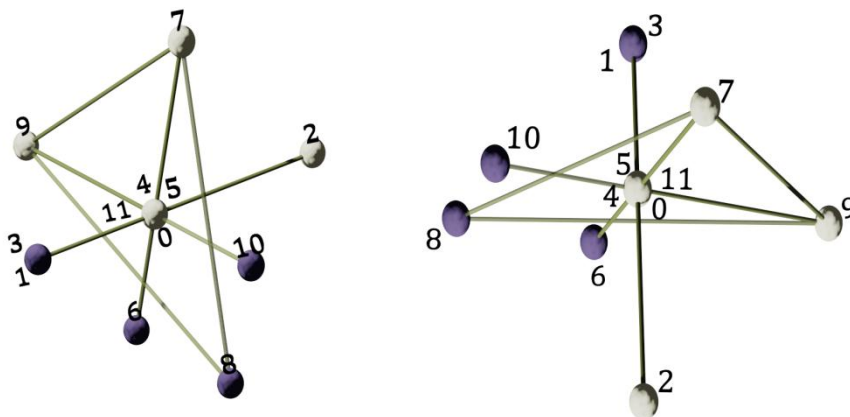
¹³⁷ Bien que ce graphe ne soit pas circulant, c'est un sous graphe de W_{12}^3 , Voir chapitre 2.2.3 pour la définition des Webs et la traduction des propriétés des graphes en termes musicaux.

Tableau 3-2 : Ensemble des projections spectrales du graphe associé au clavier du piano

Espace	E0	E1	E2	E2	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
v. Propre	1.6219	1.6139	1.5	1.5	1.5	1.2461	1.2155	0.7536	0.6246	0.2654	0.1589	0
do	-0.442	-0.419	0.000	0.000	0.000	-0.265	-0.370	-0.079	0.415	-0.286	-0.270	-0.297
do #	0.161	0.279	-0.147	0.446	0.173	0.440	0.211	0.127	0.452	-0.159	-0.323	-0.243
ré	0.228	0.000	0.208	-0.630	-0.244	0.000	0.299	0.180	0.000	0.000	-0.457	-0.343
mi b	0.161	-0.279	-0.147	0.446	0.173	-0.440	0.211	0.127	-0.452	0.159	-0.323	-0.243
mi	-0.442	0.419	0.000	0.000	0.000	0.265	-0.370	-0.079	-0.415	0.286	-0.270	-0.297
fa	0.431	-0.430	0.000	0.000	0.000	0.343	-0.278	-0.370	0.086	0.436	0.110	-0.297
fa #	-0.231	0.203	-0.188	0.119	-0.466	-0.282	0.390	-0.308	0.278	0.367	0.201	-0.243
sol	-0.091	0.144	0.265	-0.158	0.659	-0.199	0.083	0.212	0.197	0.260	0.350	-0.343
la b	0.103	0.000	-0.583	-0.107	-0.222	0.000	-0.273	0.608	0.000	0.000	0.294	-0.243
la	-0.091	-0.144	0.559	0.319	-0.346	0.199	0.083	0.212	-0.197	-0.260	0.350	-0.343
si b	-0.231	-0.203	-0.395	-0.225	0.244	0.282	0.390	-0.308	-0.278	-0.367	0.201	-0.243
si	0.431	0.430	0.000	0.000	0.000	-0.343	-0.278	-0.370	-0.086	-0.436	0.110	-0.297
N Uniques	7	11	8	8	8	11	7	7	11	11	7	3

Dans chaque colonne, les titres sont les noms des espaces propres et les valeurs propres associées. Les valeurs propres sont classées par valeur décroissante, les indices des sous-espaces propres vont croissant. Les barres roses et bleues indiquent de façon graphique les valeurs numériques. Nous indiquons dans la dernière ligne du tableau le nombre de valeurs uniques rencontrées dans la dimension correspondante et remarquons qu'aucun sous-espace propre ne distingue entièrement les douze points.

Tous les sous-espaces propres sont unidimensionnels hormis E_2 qui est à trois dimensions. La projection dans l'espace E_9 propose trois valeurs différentes, elle sera visualisée.

Figure 3-3 : Projection du graphe piano dans l'espace E_2

En projetant le graphe dans le sous-espace propre E_2 (voir ci-dessus figure 3-3), les douze notes sont réparties sur un plan ou le long d'un axe qui lui est perpendiculaire. Les quatre points correspondant aux touches blanches adjacentes deux par deux $\{11,0,4,5\}$ sont superposés et occupent une position centrale, intersection du plan et de l'axe. Ils sont alignés avec le premier centre de symétrie du clavier, *ré* (2), et ses deux voisins noirs $\{1,3\}$, eux-mêmes superposés. Tous les points exceptés $\{1,2,3\}$ sont coplanaires. Dans cet espace 3D, nous constatons encore que 2 et 8 sont des points essentiels. Nous avons une correspondance entre les distances

en demi-tons par rapport à ré (resp. la^b) et les distances mesurées dans cet espace propre.

L'espace E_9 est unidimensionnel, nous constatons ainsi trois groupes de notes dont la projection se superpose.

- $\{11,0,4,5\}$: les blanches adjacentes vues précédemment ; elles ont un voisin noir et un voisin blanc.
- $\{2,7,9\}$: les blanches ayant deux voisins blancs et deux voisins noirs.
- $\{1,3,6,8,10\}$: les noires (qui ont toujours deux voisins blancs).

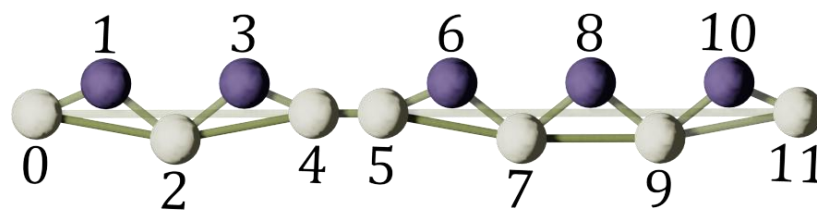


Figure 3-4 : Projection du graphe piano dans l'espace E_9

L'image ci-dessus (figure 3-4) montre la séparation entre les trois groupes de touches. L'espace n'ayant qu'une seule dimension, nous avons choisi d'écarter artificiellement les points selon un axe horizontal afin de les différencier et de retrouver de façon explicite un arrangement familier¹³⁸.

Les autres sous-espaces propres sont tous à une dimension, ils présentent toujours des points superposés, nous avons deux cas :

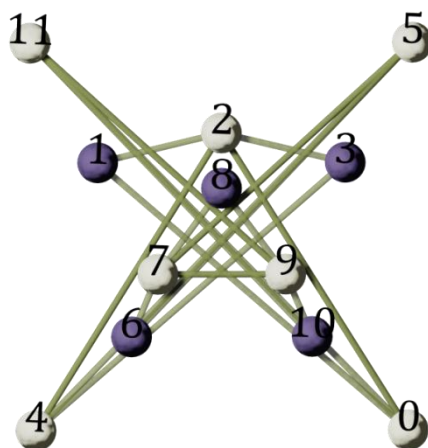
- Cas 1 : 2 et 8 sont confondus et tous les autres points ont une coordonnée différente, opposés deux à deux.
- Cas 2 : 2 et 8 sont distincts et tous les autres points sont associés deux à deux.

Dans les deux cas les points associés deux par deux sont les symétriques par rapport à 2 (ou à 8 car nous sommes dans \mathbb{Z}_{12}). Par exemple do^\sharp et mi^b , notes situées à $\pm \frac{1}{2}$ ton de $ré$ (et $\pm \frac{5}{2}$ tons de la^b).

Pour visualiser les espaces à une dimension, les barres de couleur dans le tableau suffisent. Mais, afin de séparer tous les points, nous allons combiner deux sous-espaces propres pour obtenir un graphique à deux dimensions¹³⁹. Par exemple, l'association $\{E_0, E_1\}$ donne le résultat suivant, représenté par la figure 3-5 ci-dessous :

¹³⁸ Nous aurons reconnu la disposition des touches du piano.

¹³⁹ Il faut alors choisir deux espaces tels qu'associés ils séparent tous les points.

Figure 3-5 : Projection du graphe piano dans l'espace combiné $\{E_0, E_1\}$

La figure comporte un axe de symétrie passant par les points 2 et 8, qui correspondent aux deux notes dont la position est centrale sur le clavier : *ré* (touche blanche) et son triton *la^b* (touche noire). Les points correspondant à des touches blanches adjacentes sont aux extrémités. Ce sont les notes $\{si, do\}$ et $\{mi, fa\}$. Ces quatre notes sont, dans la réalité du clavier, les plus éloignées de l'axe $\{ré, la^b\}$. Chaque point ayant un symétrique par rapport à l'axe $\{2,8\}$, ceux-ci sont équidistants à la fois de *ré* et de *la^b* ¹⁴⁰.

Afin de compléter les visualisations nous proposons les combinaisons suivantes :

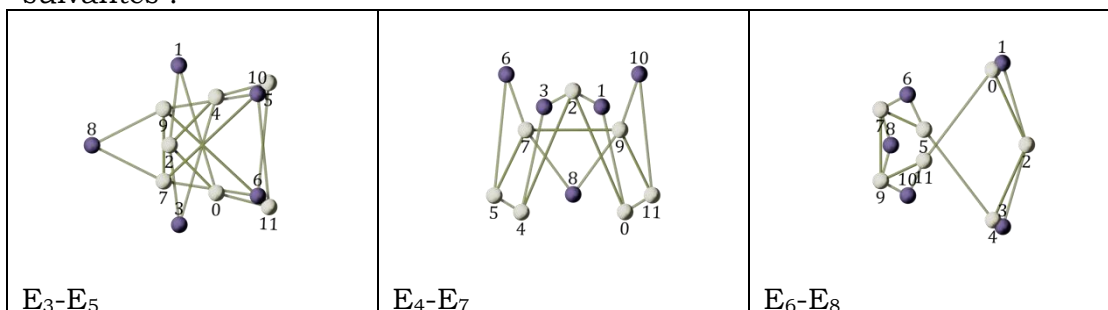


Figure 3-6 : Projections du graphe piano dans d'autres combinaisons d'espaces

Ces trois combinaisons choisies montrent l'axe de symétrie 2-8 de façon remarquable (voir ci-dessus figure 3-6).

Le graphe associé au clavier du piano n'a pas de parcours eulérien, il possède deux cycles hamiltoniens correspondant à la gamme chromatique montante et descendante.

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,0\}$ et $\{0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0\}$.

¹⁴⁰ C'est aussi le cas pour les touches sur le clavier du piano : par exemple la distance mesurée avec une règle de *ré* à *si* est la même que celle de *ré* à *fa*.

Conclusion

La projection spectrale du graphe associé au clavier du piano laisse apparaître des symétries que le musicien pratiquant connaît plus ou moins consciemment, l'axe passant par *ré* et *la^b* ainsi que la conservation des distances se distinguent nettement grâce aux projections dans les sous-espaces choisis.

3.1.2. Le clavier d'accordéon chromatique

Un clavier d'accordéon dispose d'un minimum de trois rangées pour contenir les douze degrés chromatiques, les rangées supplémentaires facilitent la transposition. Il existe plusieurs dispositions de claviers :

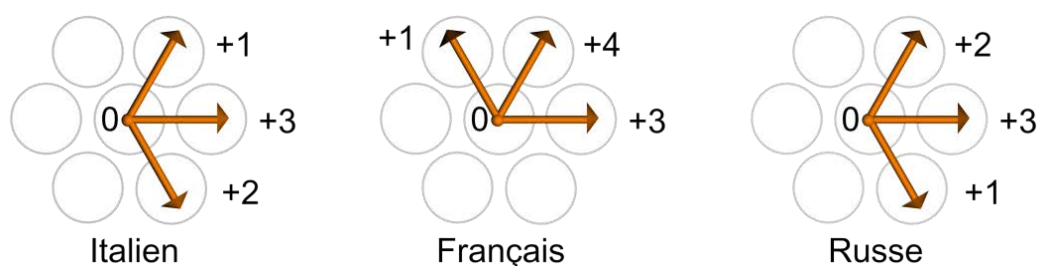


Figure 3-7 : Les dispositions de différents claviers d'accordéon

La figure 3-7 ci-dessus montre trois dispositions de claviers d'accordéon. Avec ces claviers, chaque touche a six voisins, donc six directions de déplacement, réduites à trois axes par symétrie. Les symboles $\{+1, +2, \dots\}$ indiquent la distance au voisin en demi-tons. Nous étudions la disposition la plus usuelle en Europe¹⁴¹.



Figure 3-8 : Le clavier d'accordéon chromatique

La figure 3-8 ci-dessus est une image fictive du clavier de l'accordéon¹⁴². Contrairement à celui du piano, ce clavier est "circulant", chaque touche est voisine de six autres qui correspondent aux notes distantes de $\pm 1/2$ ton, ± 1 ton et $\pm 3/2$ tons. C'est-à-dire demi-ton, ton, tierce mineure.

¹⁴¹ La disposition italienne est le standard européen, la disposition française se caractérise par un décalage de la troisième rangée, elle n'est pratiquement plus utilisée que par André Verchuren. Ce détail m'a été confirmé par l'accordéoniste Claude Sauvage (entretien le 01.09.2011). Dans la disposition russe les deux directions sont permutées, ce qui ne change pas le graphe.

¹⁴² Dans cette image, le *do* est placé volontairement sur la seconde ligne afin d'en montrer les voisins. Le clavier d'un authentique accordéon comporte de trois à quatre rangées, le *do* étant situé sur la première.

Nous considérons un accordéon pourvu d'un clavier théoriquement cyclique, et créons un graphe de la façon suivante : deux sommets sont voisins si les touches du clavier sont voisines. Ainsi la touche *do* est voisine de $\{do^\sharp, ré, mi^\flat, sol, la, si^\flat, si\}$.

Avec les claviers italiens et russes, nous sommes dans le cas particulier d'un graphe circulant ou les sommets reliés sont les plus proches sur le cercle. Ces deux claviers peuvent être modélisés par le même Web à douze sommets W_{12}^4 .

Le graphe et sa matrice d'adjacence sont représentés ci-dessous.

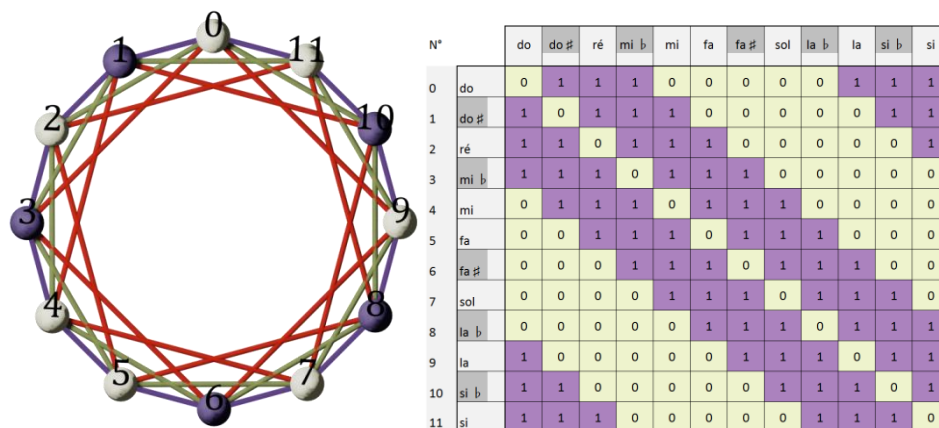


Figure 3-9 : Le graphe et la matrice associés au clavier de l'accordéon chromatique

Afin d'améliorer la lisibilité nous avons arbitrairement attribué une couleur à chaque type de liaison : rouge pour les tierces mineures, vert pour les tons, violet pour les demi tons. Les sommets de couleur claire sont les notes naturelles (touches blanches d'un piano), les sommets sombres symbolisent les notes altérées (touches noires du piano). Nous avons ainsi conservé la coloration de la représentation du clavier ci-dessus. Ce graphe est un cas particulier du cas général symétrique et circulant démontré précédemment (chapitre 2.5.1), les calculs ne seront donc pas détaillés. Les valeurs propres sont :

$$\{6, 1 + \sqrt{3}, -2, -2, 0, 1 - \sqrt{3}, -2, 1 - \sqrt{3}, 0, -2, -2, 1 + \sqrt{3}\}.$$

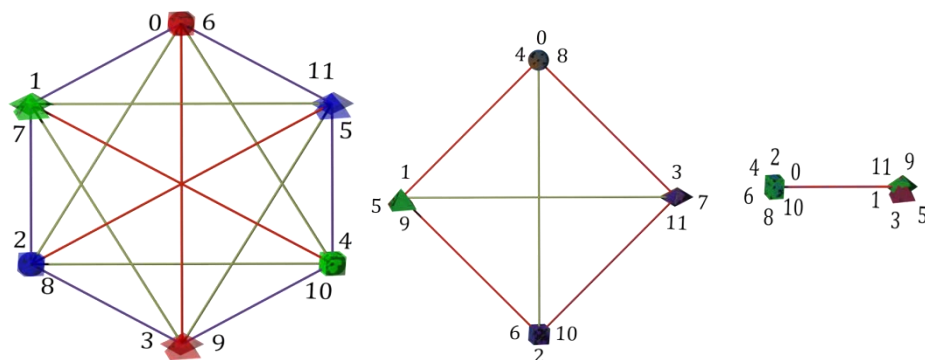
Le spectre de son laplacien normalisé est :

$$\{0.000, 0.545, 1.333, 1.333, 1.000, 1.122, 1.333, 1.122, 1.000, 1.333, 1.333, 0.545\}.$$

Dans le premier espace propre E_0 associé à la valeur propre 6, tous les points sont superposés.

Le second sous-espace propre E_1 est bidimensionnel, il fait apparaître le cercle chromatique.

Le sous-espace propre E_3 est à cinq dimensions, nous le visualisons selon trois vues (voir ci-dessous figure 3-10). Nous utilisons ici les symboles graphiques du modèle *Planet* pour plus de lisibilité.

Figure 3-10 : Projection du clavier chromatique dans E_3 à cinq dimensions

Concernant les quatre premières dimensions, nous divisons comme d'habitude la projection en deux vues 2D perpendiculaires. La première vue montre l'hexagone où les tritons sont superposés, la seconde vue laisse apparaître la structure en carré où les accords dont les symboles ont la même forme se superposent. Les quatre premières dimensions permettent déjà de séparer les douze notes. La cinquième dimension n'apporte pas d'information supplémentaire ; c'est une dimension où les notes sont réparties en deux groupes correspondant aux deux gammes par ton.

Le sous-espace propre E_4 bidimensionnel montre le triangle et E_5 est bidimensionnel, il fait apparaître le cercle des quartes.

Ce graphe est eulérien, voici un exemple de parcours :

{3, 5, 7, 9, 11, 1, 8, 3, 10, 5, 0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 6, 8, 10, 0, 7, 12, 2, 7, 2, 9, 2, 4, 9, 4, 11, 4, 6, 1, 3}.

Il possède 36774 cycles hamiltoniens dont

{0,2,4,6,1,11,9,7,5,3,8,10}¹⁴³.

Conclusion

Les projections spectrales du graphe associé au clavier de l'accordéon montrent les symétries de ce clavier et son aspect transpositeur que l'on retrouve dans les représentations. Ceci me fut confirmé par l'accordéoniste Claude Sauvage¹⁴⁴. A la vue des projections spectrales du graphe, il remarque "les symétries et les arrangements" qu'il a "*sous les doigts*" (sic). *Les triangles et carrés* sont pour lui des *figures connues* qu'il *retrouve dans l'arrangement du clavier*. Dans la représentation (le musicien parle du graphe ndlr) on retrouve les gammes ton-ton, demi-ton-ton mais pas le tétracorde" En effet, la disposition des touches associées à un tétracorde n'étant pas symétrique, il est logique que le tétracorde n'apparaisse pas dans notre modélisation.

¹⁴³ Résultat trouvé par Mathematica™

¹⁴⁴ Entretien avec l'artiste le premier septembre 2011.

3.1.3. Le clavier hexagonal "*Tonnetz*"

Cette disposition des touches est parfois appelée "*table harmonique*".

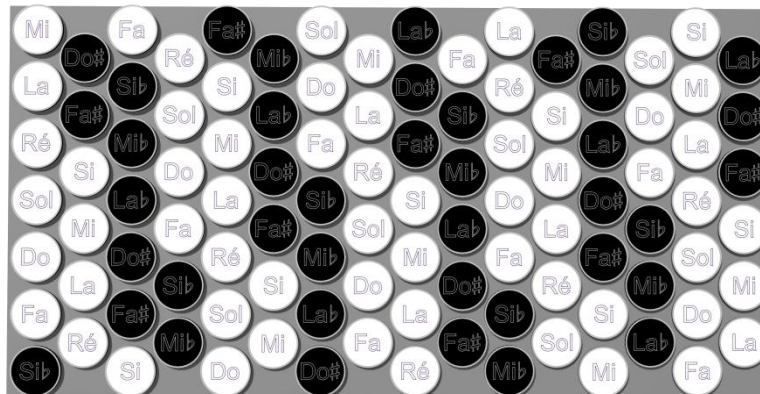


Figure 3-11 : Le clavier dit "Hexagonal"

L'arrangement représenté sur la figure 3-11 ci-dessus est utilisé pour la construction de plusieurs claviers contrôleurs midi¹⁴⁵. Il est basé sur la disposition du *Tonnetz*¹⁴⁶. Le graphe correspondant est associé à la matrice d'adjacence suivante :

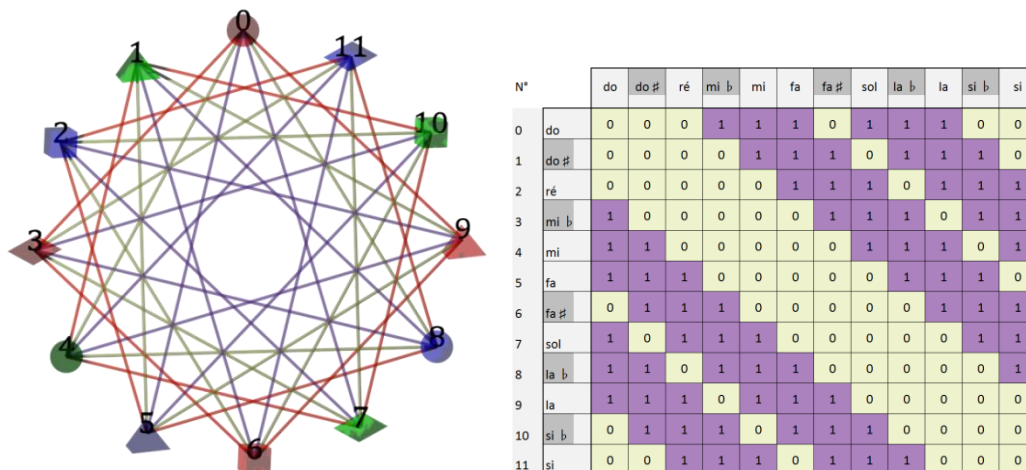


Figure 3-12 : Le graphe et la matrice associés au clavier hexagonal *Tonnetz*

C'est encore un cas particulier du modèle symétrique et circulant à douze sommets. L'ensemble de ses valeurs propres est :

$$\{6, -1 - \sqrt{3}, -2, 2, 0, 1 - \sqrt{3}, -2, 1 - \sqrt{3}, 0, 2, -2, -1 - \sqrt{3}\}.$$

Le spectre du laplacien normalisé est :

$$\{0, \frac{7 + \sqrt{3}}{6}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7 - \sqrt{3}}{6}, \frac{4}{3}, \frac{7 - \sqrt{3}}{6}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7 + \sqrt{3}}{6}\}.$$

¹⁴⁵ Citons par exemple le clavier Sonome™ commercialisé depuis 1991.

¹⁴⁶ La représentation originale de Riemann est reproduite en Figure 1-2, p. 20. Voir aussi (Cohn, 1997) et (Cohn, 1998).

La projection spectrale comporte six sous-espaces propres ; l'espace E_0 associé à la valeur propre 0 est trivial : tous les points sont confondus.

Hormis E_2 , associé à la valeur propre $4/3$ qui est tridimensionnel, les autres sous-espaces propres sont à deux dimensions et les projections font apparaître les figures géométriques décrites au chapitre 2.5.1.7, à savoir : Le cercle chromatique et celui des quarts, le triangle et le carré. L'espace 3D se représente de la façon suivante :

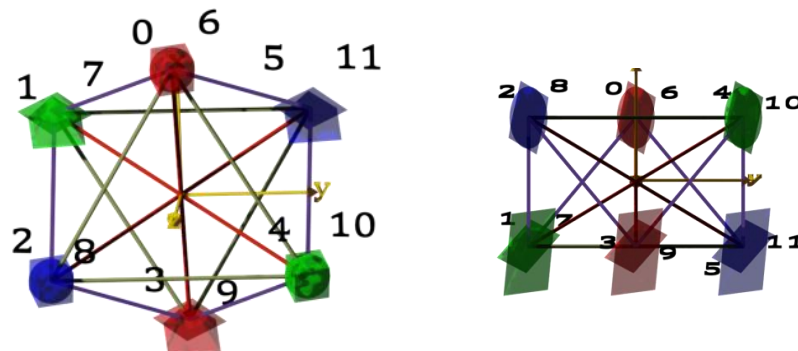


Figure 3-13 : Projection du Tonnetz dans le sous-espace E_2 à trois dimensions

Les points sont superposés deux à deux, par triton. Les triangles symbolisant les tierces majeures sont visibles alors que les carrés représentant les tierces mineures sont réduits à un segment, les tritons étant superposés. Les liaisons à la quarte font apparaître un hexagone dans la vue de dessus seulement. En vue de côté, les notes paires sont au-dessus des notes impaires à cause de la troisième composante $\{1, -1, \dots\}$ de cet espace, voir chapitre 2.5.1.7.

Ce graphe est eulérien, et hamiltonien. Voici un exemple de cycle eulérien :

$\{8, 5, 9, 0, 3, 7, 10, 1, 6, 10, 5, 0, 4, 11, 8, 0, 7, 11, 6, 2, 10, 3, 6, 9, 4, 8, 3, 11, 2, 9, 1, 4, 7, 2, 5, 1, 8\}$.

Et voilà un exemple de cycle hamiltonien parmi les 26852 trouvés :

$\{0, 3, 6, 1, 4, 7, 10, 2, 11, 8, 5, 9, 0\}$.

Conclusion

Ainsi que nous le constatons sur le clavier dont il s'inspire, le graphe du Tonnetz projeté spectralement fait bien apparaître les progressions par tierces majeures et mineures mais aussi les deux cercles fondamentaux (cercle chromatique et cercle des quarts) dans les sous-espaces bidimensionnels, l'espace 3D n'apporte pas de visualisation spectaculaire.

3.1.4. Le clavier d'accordéon Wicki-Hayden

Ce clavier ¹⁴⁷ est utilisé pour les *concertinas*¹⁴⁸, c'est une alternative au précédent. Il a pour avantage d'avoir toutes les notes de la gamme majeure sous les doigts sans déplacer. Comme le clavier chromatique, il est

¹⁴⁷ L'idée originale de Kaspar Wicki (Wicki, 1896) a été reprise par Brian Hayden (Hayden, 1982).

¹⁴⁸ Les *concertinas* sont de petits instruments similaires au bandonéon, mais de forme hexagonale, de la famille des accordéons.

également "circulant" mais parmi les six voisins d'une touche, certains sont doublés. La figure 3-14 ci-dessous propose une représentation fictive du clavier de Wicki-Hayden.



Figure 3-14 : Le clavier d'accordéon de Wicki-Hayden

Nous travaillons toujours dans \mathbb{Z}_{12} , et selon les principes précédents, les sommets voisins du graphe sont les notes distantes, soit d'une quarte, soit d'une quinte, ou soit d'un ton montant ou descendant¹⁴⁹. Ainsi la touche *do* est voisine de $\{si^b, ré, fa, sol\}$. Chaque touche étant voisine de sa quarte (et de sa quinte) deux fois, nous utilisons ici un graphe pondéré et symbolisons graphiquement les liaisons plus importantes par un trait plus large.

D'autre part, nous assignons comme précédemment une couleur à chaque type de liaison : rouge pour les quartes, vert pour les tons. Les sommets de couleur claire sont les notes naturelles, les sommets sombres sont les notes altérées. Nous obtenons le graphe suivant, la matrice d'adjacence circulante comporte les valeurs 0, 1 et 2 :

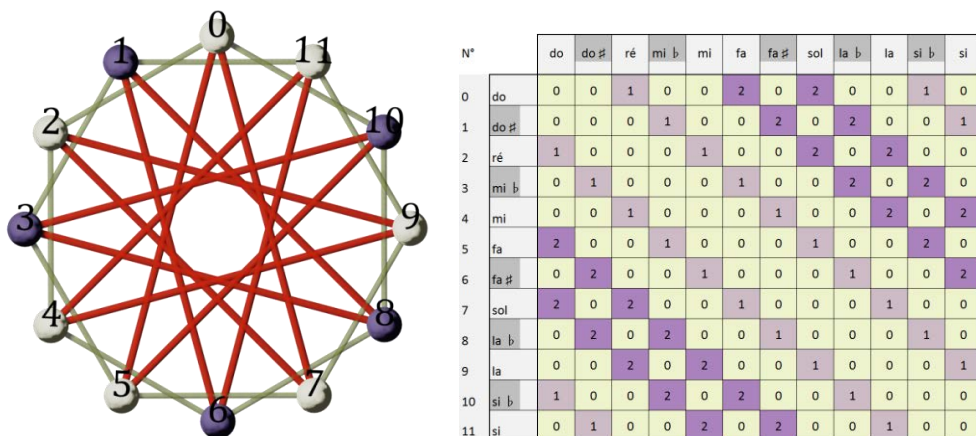


Figure 3-15 : Le graphe et la matrice associés au clavier Wicki-Hayden

Ce graphe est un cas particulier du cas général symétrique et circulant démontré précédemment (voir chapitre 2.5.1), ses valeurs propres sont :

$$\{6, 1 - 2\sqrt{3}, 1, -2, -3, 1 + 2\sqrt{3}, -2, 1 + 2\sqrt{3}, -3, -2, 1, 1 - 2\sqrt{3}\}.$$

Le spectre de son laplacien normalisé est :

$$\{0, \frac{5 + 2\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5 - 2\sqrt{3}}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5 - 2\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5 + 2\sqrt{3}}{6}\}.$$

¹⁴⁹ Si au lieu de générer C_{12} chromatiquement, nous utilisons la quarte comme générateur, le graphe peut s'écrire $C_{12} + W_{12}^3$. Voir plus bas, le clavier de Janko au chapitre 3.1.5.

Les sous-espaces propres associés sont la combinaison des sous-espaces décrits au chapitre 2.5.1. Le troisième sous-espace propre E_4 associé à la valeur propre $4/3$ est tridimensionnel, les autres étant plans et leur projection ne montrant pas de structure nouvelle, ils ne seront pas détaillés.

Le second espace propre est à trois dimensions, il est constitué des deux vecteurs où la projection fait apparaître un carré et du vecteur qui laisse alterner deux valeurs opposées (voir chapitre 2.5.1.) Le résultat est un tétraèdre.

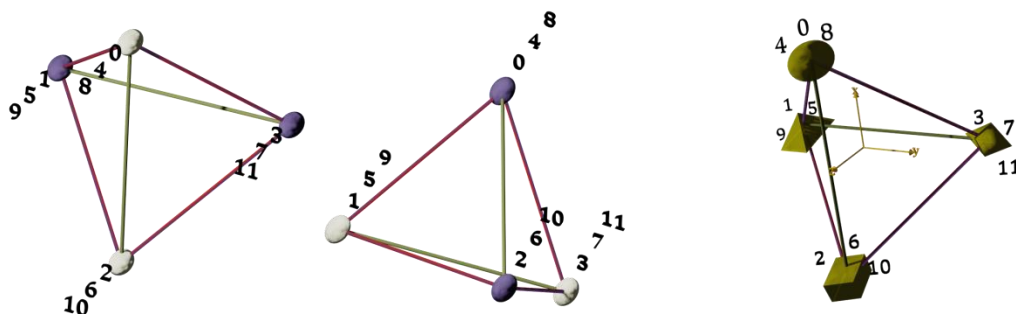


Figure 3-16 : Différentes vues de la projection du clavier Wicki-Hayden

Dans la figure 3-16 ci-dessus, les deux vues de gauche utilisant des symboles noirs et blancs, la superposition est moins évidente que dans l'image de droite utilisant les symboles du modèle *Planet*. Ici, les notes qui sont issues d'un même accord augmenté sont superposées.

Voici le cas simplifié :

Si l'on ne tient pas compte de la pondération, ce graphe devient un réseau composé des relations au ton et à la quarte¹⁵⁰ ; son spectre devient

$$\{4, 1 - \sqrt{3}, 0, -2, -2, 1 + \sqrt{3}, 0, 1 + \sqrt{3}, -2, -2, 0, \sqrt{3} - 2\}$$

Son laplacien normalisé a pour spectre

$$\left\{0, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, 1, \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\right\}$$

La valeur propre $\frac{3}{2}$ a pour multiplicité 4, le sous-espace propre associé est composé des vecteurs des groupes 3 et 4 (définis au chapitre 2.5.1.7), elle engendre donc le modèle *Planet* de façon native.

Les autres sous-espaces propres sont représentés par les groupes 1 et 5 (définis au chapitre 2.5.1.7) montrant le cercle chromatique et celui des quarts.

Ce graphe est eulérien, et hamiltonien.

Voici un exemple de cycle eulérien :

$$\{3, 5, 7, 9, 11, 1, 8, 3, 10, 5, 0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 6, 8, 10, 0, 7, 0, 2, 7, 2, 9, 2, 4, 9, 4, 11, 4, 6, 1, 3\}.$$

Et voilà un exemple de cycle hamiltonien parmi les 36776 trouvés

$$\{0, 2, 4, 6, 1, 11, 9, 7, 5, 3, 8, 10, 0\}.$$

¹⁵⁰ Si au lieu de générer C_{12} chromatiquement, nous utilisons la quarte comme générateur, ce graphe est le Web W_{12}^3 .

Conclusion

La version non pondérée du graphe offre une meilleure lisibilité : les projections spectrales du graphe associé à ce clavier font apparaître les deux cercles (chromatiques et quarts) ainsi que le modèle *Planet* de façon native.

3.1.5. Clavier de Janko

Le clavier uniforme de Janko (Janko, 1886) n'a pas su s'imposer pour les pianos. Sa disposition est plus applicable pour certains accordéons ou pour des instruments à percussion tel le xylophone. Il comporte deux rangs de touches correspondant aux deux gammes par ton. Les troisième et quatrième rangées de notes sont identiques aux deux premières (voir une image réelle en figure 3-17 ainsi que la représentation fictive ci-dessous figure 3-18). Son argument principal de vente était qu'il s'agissait d'un clavier transpositeur, c'est-à-dire "circulant" en termes de graphe.



Figure 3-17 : Un piano équipé du clavier de Janko¹⁵¹

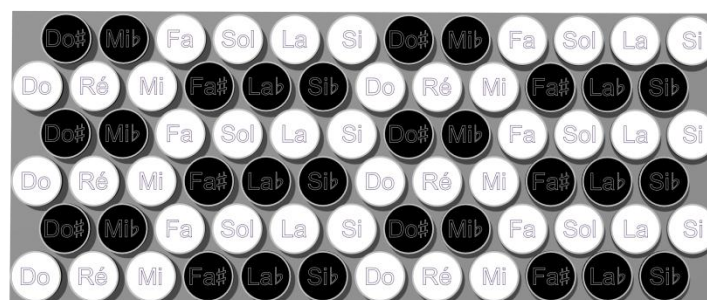


Figure 3-18 : L'arrangement des touches selon le clavier de Janko

Nous considérons un clavier théoriquement cyclique, et créons un graphe de la façon suivante : deux sommets sont voisins si les touches du

¹⁵¹ Image ©Morn the Gorn, Wikipédia 2010 licence creative commons.

clavier sont voisines. Les voisins étant distant de $\frac{1}{2}$ et 1 ton, si l'on ne tient pas compte de la pondération, nous avons un $Web W_{12}^3$.

Le graphe et la matrice d'adjacence associés au clavier de Janko sont représentés ci-dessous :

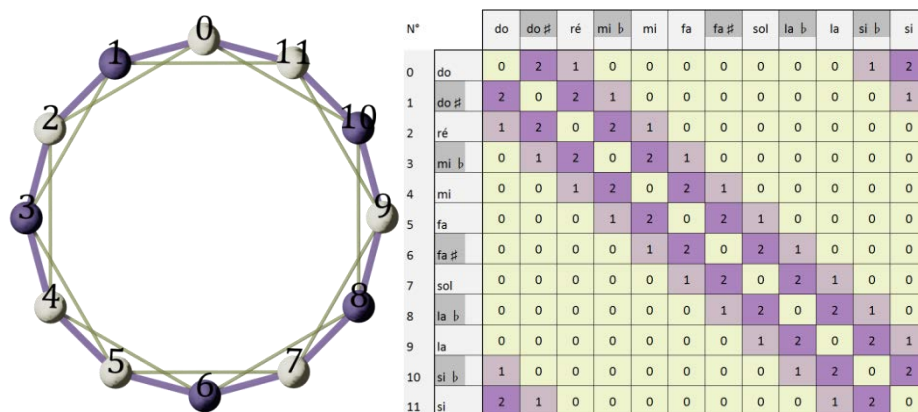


Figure 3-19 : Le graphe et la matrice associés au clavier de Janko

La matrice est circulante et pondérée, l'analyse spectrale que nous ne détaillerons pas donne les valeurs propres suivantes :

$$\{6, 1 + 2\sqrt{3}, 1, -2, -3, 1 - 2\sqrt{3}, -2, 1 - 2\sqrt{3}, -3, -2, 1, 1 + 2\sqrt{3}\}.$$

Le spectre de son laplacien normalisé est

$$\{0, \frac{5 - 2\sqrt{3}}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5 + 2\sqrt{3}}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5 + 2\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5 - 2\sqrt{3}}{6}\}.$$

Ce graphe et celui associé au clavier Wicki-Hayden, détaillé plus haut, sont co-spectraux, les projections graphiques seront donc identiques.

Ce graphe est eulérien, et hamiltonien. Voici un exemple de cycle eulérien :

$\{3, 5, 7, 9, 11, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 4, 6, 8, 10, 0, 11, 0, 2, 1, 3\}.$

Et enfin un exemple de cycle hamiltonien parmi les 220 trouvés : la gamme chromatique

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0\}.$$

Conclusion

Le graphe associé au clavier de Janko peut s'écrire $C_{12} + W_{12}^3$. C'est le même graphe que celui du clavier de Wicki-Hayden (en générant les indices par quarts). Il est logique qu'ils soient co-spectraux. Les mêmes projections apparaissent, bien que les claviers soient différents. La conclusion précédente (voir plus-haut 3.1.4) est valable.

3.2. ANALYSE DE RESEAUX DE NOTES

Nous étudions les réseaux de tons où les sommets du graphe sont des notes ou classes de hauteurs. L'analyse des espaces d'accords où les nœuds du graphe symbolisent des accords se fera au chapitre suivant (3.3).

3.2.1. Espace circulaire des hauteurs

Dans un espace circulaire des hauteurs, les notes sont dessinées le long d'un cercle. Par analogie nous construisons des graphes circulaires en considérant les deux seuls voisins de chaque note sur le cercle comme voisins en termes de graphes. Citons pour exemple par ordre croissant :

- C_3 : l'espace circulaire du *Blues* présenté dans ce mémoire (Chapitre 3.5.1),
- C_7 : le cercle "chromatique de Newton" à sept notes,
- C_{12} : le cercle chromatique, des quatre ou des quintes,
- S_1 : l'espace circulaire continu de Dmitri Tymoczko¹⁵².

Seul sera étudié ici le graphe trivial à douze sommets C_{12} . C'est aussi le graphe de Cayley généré par $\mathbb{Z}/12(-1,1)$. Il est représenté sur la figure 2-6 au chapitre 2.1.4.4

Ce graphe comporte deux cycles hamiltoniens commençant et finissant par *do*, les gammes chromatique ascendante et descendante :

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,0\} \text{ et } \{0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0\}.$$

Les cycles hamiltoniens sont aussi des cycles eulériens. Son spectre est

$$\{2, \sqrt{3}, 1, 0, -1, -\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}.$$

Le spectre du laplacien normalisé est

$$\{0, \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}), \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}), 2, \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}), \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})\}.$$

Les projections spectrales des représentations circulaires laissent apparaître toutes les formes géométriques possibles : triangle, carré, hexagone, dodécagone, et dodécagone vu sous forme d'étoile. (voir chapitre 2.5.1, tableau 2-25).

En combinant encore une fois l'espace composé des carrés et celui composé des triangles, nous retrouvons la géométrie du modèle *Planet*.

¹⁵² Dans l'espace circulaire de Tymoczko, la hauteur de la note peut varier de façon continue (Tymoczko, 2006). C'est ce qu'il utilise en laissant glisser les points le long du cercle dans l'animation "Chopin circular space". Ce clip est disponible sur le DVD d'accompagnement, voir p. 278. En pratique les notes jouées sont celles du tempérament égal à douze hauteurs, C_{12} se représente sur le cercle S_1 .

3.2.2. Le Réseau d'Euler

La figure suivante présente deux versions du *Speculum Musicum* d'Euler considéré comme étant à l'origine des graphes et des *Tonnetze*¹⁵³ :

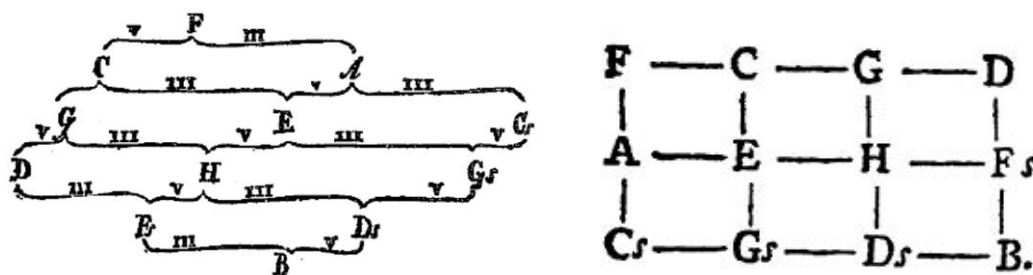


Figure 3-20 : Le *Speculum Musicum* d'Euler

L'image de gauche est la première version (Euler, 1739), reprise ensuite de façon plus symétrique (Euler, 1774).

Bien que le *Speculum* s'applique à un environnement tonal et qu'il soit constitué de tierces et quintes pures (Gollin, 2009), nous pouvons le représenter par le graphe et sa matrice d'adjacence suivants :

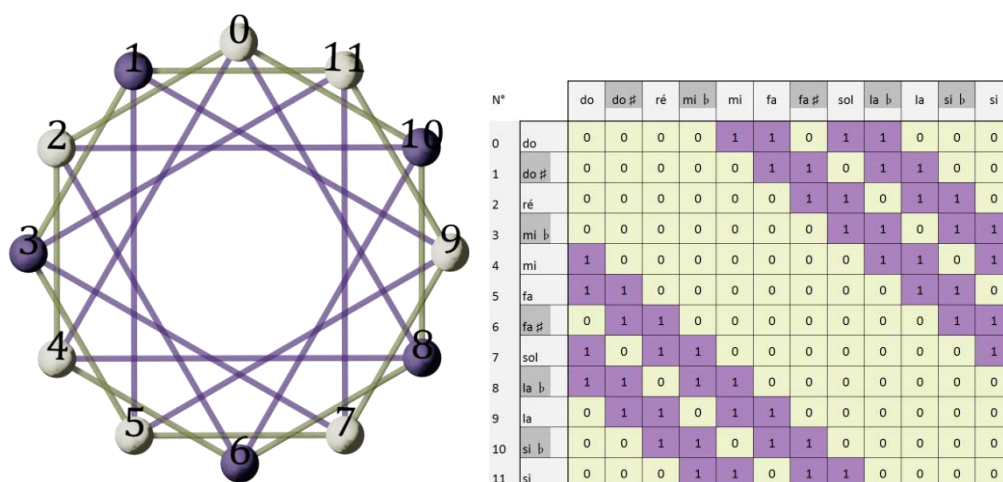


Figure 3-21 : Le graphe et la matrice associés au réseau d'Euler

Il s'agit d'un graphe régulier d'ordre 4. L'analyse spectrale nous donne les valeurs propres suivantes :

$$\{4, -1 - \sqrt{3}, 0, 2, -2, \sqrt{3} - 1, 0, \sqrt{3} - 1, -2, 2, 0, -1 - \sqrt{3}\}.$$

Et pour le laplacien normalisé :

$$\{0, \frac{5 + \sqrt{3}}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5 - \sqrt{3}}{4}, 1, \frac{5 - \sqrt{3}}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{5 + \sqrt{3}}{4}\}.$$

¹⁵³ Parmi les branches des mathématiques, la théorie des graphes est intimement liée à la musique depuis son origine, comme le souligne Moreno Andreatta (Andreatta, 2011). En effet "Leonhardt Euler que les mathématiciens connaissent surtout pour être à l'origine de la théorie des graphes avec le problème des ponts de Koenigsberg, s'est d'abord posé un problème musical". Euler, connu en musique pour son *Speculum Musicum*, cherchait des chemins reliant une tonalité à une autre selon un parcours qui passerait par toutes les autres tonalités.

Les sous-espaces propres sont les mêmes que ceux du *Tonnetz* (voir les représentations au chapitre 3.1.3). Il suffit d'en retirer les lignes joignant les tierces mineures.

Voici un cycle eulérien :

{6,2,7,3,8,1,5,10,2,9,4,8,0,4,11,3,10,6,11,7,0,5,9,1,6}.

Et enfin un cycle hamiltonien parmi 260¹⁵⁴ :

{0, 4, 8, 1, 5, 9, 2, 6, 10 ,3 ,11, 7, 0}.

Conclusion

Les graphes associés au réseau d'Euler et au *Tonnetz* ne sont ni isomorphes ni co-spectraux mais ils partagent une répartition des multiplicités de leurs valeurs propres. Les projections des sommets de ces graphes dans leurs sous-espaces propres seront identiques. Les projections des arêtes sont bien entendu différentes.

3.2.3. Le *Tonnetz* original de Riemann

Les premiers *Tonnetze* furent mis en pratique par le musicologue Hugo Riemann (1849-1919). A l'époque, ce modèle fut réalisé dans un cadre purement tonal, Riemann n'utilise pas l'enharmonie¹⁵⁵, ce graphe est par conséquent théoriquement infini. La représentation originale est présentée en introduction en figure 1-2.

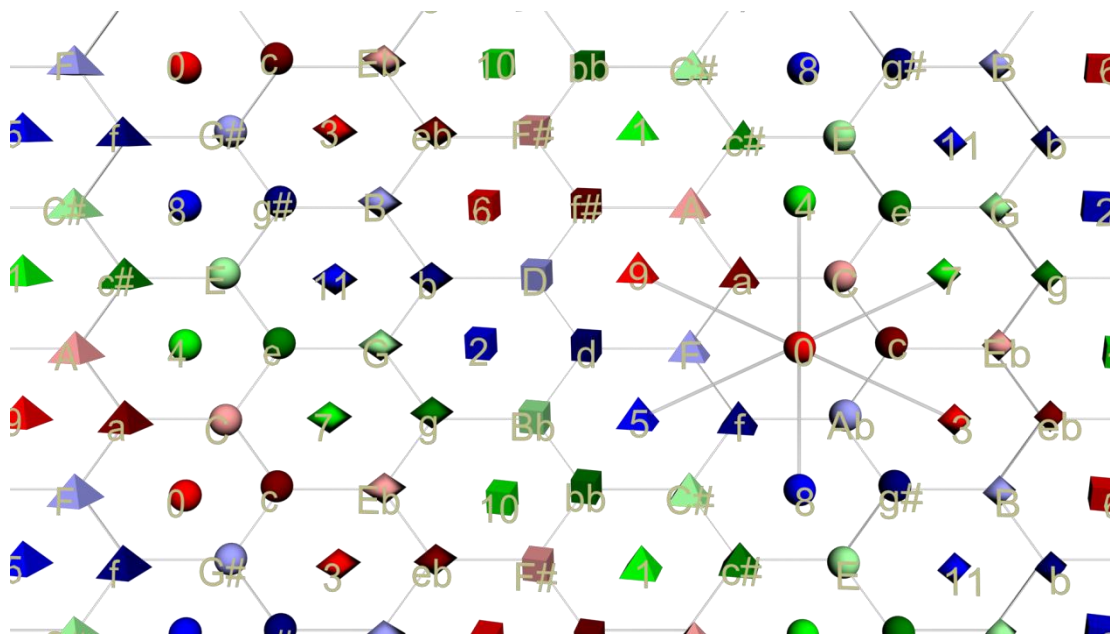


Figure 3-22 : Une représentation du *Tonnetz* et de son espace dual avec le système *Planet*

L'image ci-dessus est une représentation moderne du *Tonnetz* sous sa forme hexagonale, elle est inspirée des représentations graphiques

¹⁵⁴ 260 cycles trouvés par *Mathematica*™.

¹⁵⁵ Dans un cadre tonal, Riemann distingue Sol[#] de La^b (notés en version originale : Gis et As).

traditionnelles¹⁵⁶. La construction du *Tonnetz* et de son espace dual sont présentées en annexe multimédia (voir Clip F 6 : Traditional Chordal Space, p. 295). Les symboles représentant les notes sont aux centres des hexagones.

Le graphe associé au *Tonnetz* étant le même que celui du clavier qu'il a inspiré, l'analyse effectuée du paragraphe 3.1.3 est valable ici.

3.3. ANALYSE DE RESEAUX D'ACCORDS

Nous transformons en graphe des relations définies entre accords. Ces relations seront soit des degrés de voisinages chez Weber soit des transformations avec l'espace dual du *Tonnetz* ou encore des modulations particulières chez Weitzmann.

Nous considérons maintenant un ensemble de vingt-quatre accords parfaits auquel nous associerons des graphes à 24 sommets. La notation des accords est celle définie plus haut dans le tableau 3-1. Nous numérotons par défaut les sommets du graphe de la façon suivante : $2n$ pour les accords majeurs et $2n + 1$ pour les accords mineurs ; avec n , le numéro correspondant à la fondamentale dans la *Set Theory*. Nous obtenons alors :

$C=0, c=1, C^\sharp=2, c^\sharp=3, \dots B=22, b=23$.

3.3.1. L'espace de Gottfried Weber

Gottfried Weber, compositeur et théoricien allemand (1779-1839), a travaillé sur la théorie de la composition musicale, les sons, l'harmonie et les progressions harmoniques. Il relie entre elles les tonalités qu'il juge voisines¹⁵⁷ pour obtenir l'organisation représentée dans la figure 3-23 suivante¹⁵⁸.

¹⁵⁶ Les représentations dont je me suis inspiré sont (Hyer, 1995) (Douthett & Steinbach, 1998) et (Hook, 2006).

¹⁵⁷ *Tonartenverwandschaft*, littéralement parenté entre tonalités.

¹⁵⁸ Toutes les images de ce chapitre relatives à l'espace de Weber sont issues de (Weber, 1832).

TABELLE der Tonartenverwandtschaften.

C	—	a	—	A	—	fs	—	Fis	—	dis	—	Dis	—	his	—	His	—	gls
F	—	d	—	D	—	h	—	H	—	gls	—	Gls	—	els	—	Els	—	cisls
B	—	g	—	G	—	e	—	E	—	cis	—	Cis	—	als	—	Als	—	fsis
Es	—	e	—	C	—	a	—	A	—	fs	—	Fis	—	dis	—	Dis	—	his
As	—	f	—	F	—	d	—	D	—	h	—	H	—	gls	—	Gls	—	els
Des	—	b	—	B	—	g	—	G	—	e	—	E	—	cis	—	Cis	—	als
Ges	—	es	—	Es	—	e	—	C	—	a	—	A	—	fs	—	Fis	—	dis
Ces	—	as	—	As	—	f	—	F	—	d	—	D	—	h	—	H	—	gls
Fes	—	des	—	Des	—	b	—	B	—	g	—	G	—	e	—	E	—	cis
Bes	—	ges	—	Ges	—	es	—	Es	—	e	—	C	—	a	—	A	—	fs
Eses	—	ces	—	Ces	—	as	—	As	—	f	—	F	—	d	—	D	—	h
Aes	—	fos	—	Fes	—	dos	—	Des	—	b	—	B	—	g	—	G	—	e
Deses	—	bes	—	Bes	—	ges	—	Ges	—	es	—	Es	—	e	—	C	—	a

Figure 3-23 : Les parentés entre tonalités de Weber

Weber considère des degrés de familiarité entre tonalités que nous traduirons en distances sur un graphe. Dans la version originale, Weber parle de *Verwandschaftsgrad* (degré de parenté), il procède pas à pas en distinguant trois niveaux de parenté. Nous allons opérer de manière analogue.

3.3.2. Weber 1 : les parents directs, la carte de Schoenberg

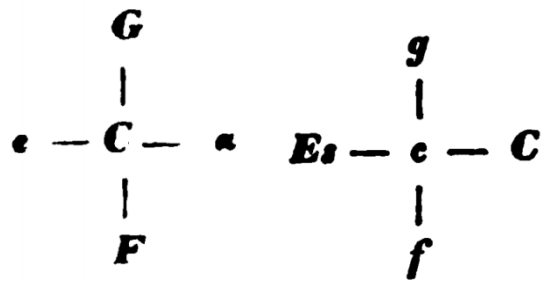


Figure 3-24 : Les accords parents directs chez Weber.

La figure 3-24 ci-dessus illustre à droite les parents de *do majeur*, à gauche ceux de *la mineur*. L'ensemble des accords directement apparentés chez Weber n'est pas celui des "tons voisins"¹⁵⁹.

En ne considérant que les premiers voisins dans l'espace de Weber, Schoenberg a créé sa "carte des régions" (Schoenberg & Stein, 1969). Cette dernière se présente sous deux formes complémentaires : une forme où les accords sont nommés ainsi qu'une forme où les fonctions harmoniques sont mentionnées.

Dans le premier dessin, Schoenberg représente les accords majeurs et mineurs par leur nom, (C pour *do majeur*, a pour *la mineur*) et n'indique aucune fonction hiérarchique. Il y montre seulement le voisinage d'un accord sans y ajouter de sens. C'est un simple placement spatial des accords sur une grille sans volonté, ni de hiérarchie, ni de prévision de parcours harmonique. La représentation des accords nommés nous montre simplement tous les chemins possibles, c'est un simple dessin, il n'y a pas de discours musical.

En revanche, concernant la représentation sous forme de fonctions, bien qu'à chaque accord soit associée une fonction harmonique, il n'apparaît pas encore de signifiant, il s'agit de signifiance organisée pour produire du sens, autrement dit un potentiel de production de sens. La *tonique*, au centre du schéma, ne prendra sa fonction de *tonique* que lorsque qu'elle sera placée dans un schéma global. Il faudra que ses voisins existent pour lui donner sa fonction. Ce schéma présente un discours en activité pas encore achevé (Baroin, 2010).

¹⁵⁹ Tons voisins au sens actuel du terme, c'est-à-dire dont la signature ne diffère que d'une altération. Weber considère les homonymes comme parents directs (par exemple *do majeur* et *do mineur*), alors que ce ne sont pas des tons voisins.

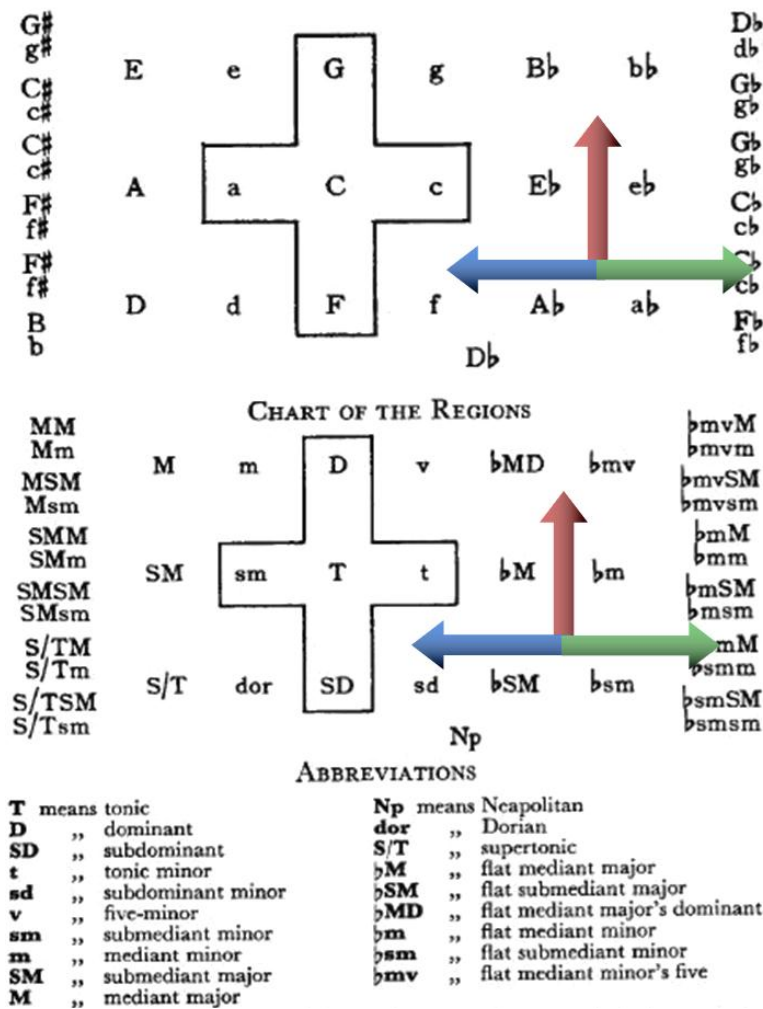


Figure 3-25 : La carte des régions de Schoenberg

A la reproduction de l'espace des accords de Schoenberg, ont été ajoutées les flèches colorées montrant les relations harmoniques. En rouge : vers la dominante, en vert : vers l'homonyme, en bleu : vers la relative (voir figure 3-25 ci-dessus)¹⁶⁰. Nous définissons le graphe de Weber 1 comme graphe à 24 sommets, non pondéré, non orienté. Deux points sont liés s'ils sont parents au premier degré dans le modèle de Weber.

- Les parents au premier degré de *do majeur* (C) sont : {F, G, c, a}.
- Les parents au premier degré de *do mineur* (c) sont : {C, E^b, g, f}.

La construction pour les 22 autres sommets se fait par transposition au sens musical du terme, c'est à dire par permutation circulaire du couple {*do majeur*, *do mineur*}. Ce graphe n'est pas circulant dans son intégralité, toutefois les relations concernant un accord mineur sont transposables pour les autres accords mineurs, il en va de même pour les accords majeurs.

¹⁶⁰ Image issue de (Schoenberg & Stein, 1969).

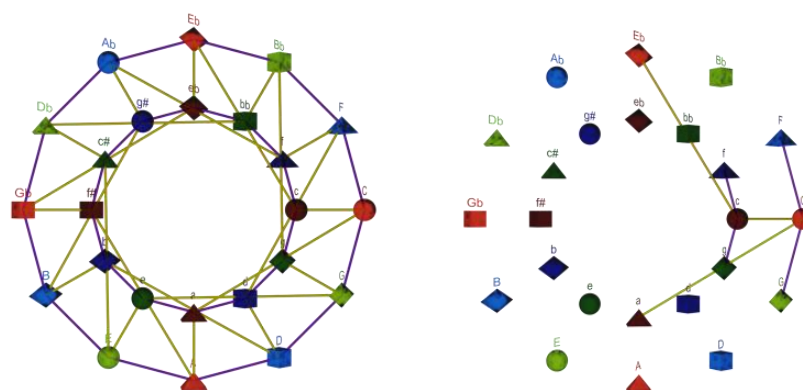


Figure 3-26 : Le graphe de Weber degré 1

La figure 3-26 ci-dessus montre, à gauche, la représentation du graphe associé à l'espace des parents directs de Weber (soit la carte des régions de Schoenberg). À droite, seules les relations vers les points C et c sont dessinées pour une meilleure lisibilité.

La matrice d'adjacence associée est la suivante :

		Majeurs												Mineurs											
		C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	c	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	b
Majeurs	C	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	C#	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	D	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	Eb	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	F	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	F#	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
	G	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
	G#	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
	A	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	Bb	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	B	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Mineurs	c	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	c#	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	d	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
	eb	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
	e	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
	f	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	f#	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	g	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g#	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	bb	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
	b	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Cette matrice, composée de 4 sous-matrices circulantes, n'est pas circulante dans sa globalité. Elle est toutefois symétrique car le graphe est non orienté : il n'y a pas de direction privilégiée. Les flèches rouges ajoutées témoignent de la circularité des quatre sous-matrices.

Ce graphe régulier d'ordre 4, à 24 sommets est non pondéré, non orienté, eulérien et hamiltonien ; voici un exemple de cycle hamiltonien parmi les 24940 calculés par *Mathematica*TM :

{0, 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 17, 22, 15, 20,
13, 18, 23, 16, 21, 14, 19, 0}.

3.3.2.1. Calcul du spectre et des sous-espaces propres

Avec les calculs effectués de façon numérique, l'étude spectrale offre les valeurs propres¹⁶¹ du laplacien normalisé suivantes :

{1.787², 1.750², 1.500², 1.3541², 1.079², 1¹, 0.921², 0.75⁶, 0.6460², 0.213², 0}

Nous obtenons deux espaces unidimensionnels, huit espaces bidimensionnels et un espace à six dimensions.

La projection dans le sous-espace E_{10} associé à la valeur propre 0 est triviale : tous les points sont superposés. Nous étudions maintenant les projections spectrales séparant tous les sommets du graphe.

3.3.2.2. Projections séparant les 24 accords

Les projections dans les sous-espaces propres E_0 , E_4 , E_6 et E_9 (associés respectivement aux valeurs propres 1.787, 1.079, 0.921 et 0.213) permettent de distinguer les vingt-quatre accords. Voir ci-dessous figure 3-27 et figure 3-28.

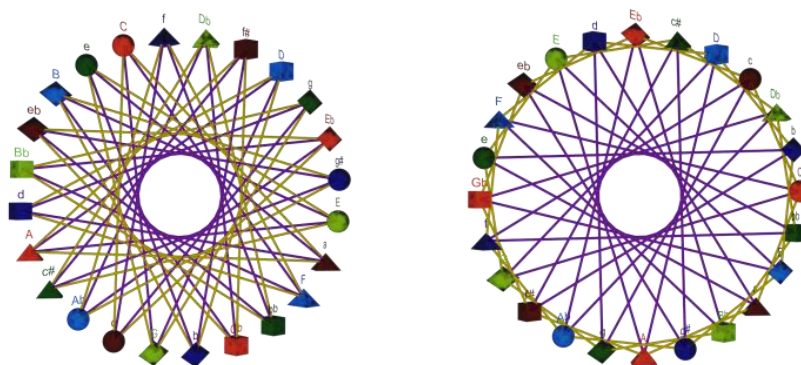
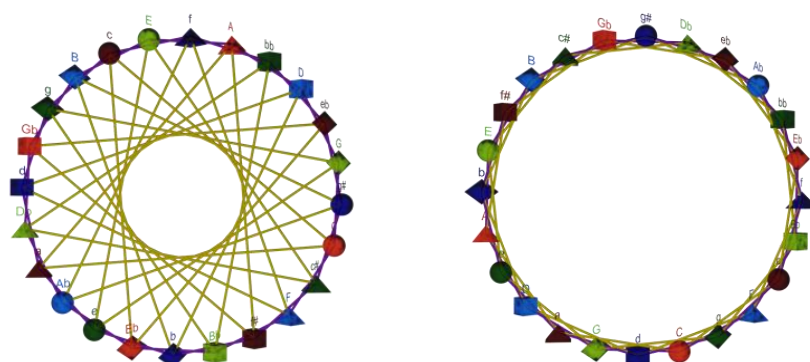


Figure 3-27 : Projections du graphe Weber 1 dans E_0 et E_4

¹⁶¹ Les valeurs étant classées par ordre décroissant, nous numérotons les sous-espaces propres associés en fonction. E_0 est associé à la valeur propre 1.787, E_1 à 1.750, etc. Les exposants indiquent la multiplicité de chaque valeur propre, et dans notre cas la dimension du sous-espace propre associé.

Figure 3-28 : Projections du graphe Weber 1 dans E_6 et E_9

Pour ces quatre projections, la matrice étant circulante, les 24 accords sont disposés le long d'un cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{12}}$ ¹⁶². La différence entre ces projections concerne la disposition des sommets du graphe le long du cercle. En parcourant le cercle depuis *do majeur* dans le sens positif, nous avons toujours une alternance des types d'accords (*majeur/mineur*). Le tableau 3-3 ci-dessous récapitule les différences entre ces quatre projections.

Tableau 3-3 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe de Weber 1

Projection	Suite depuis <i>do majeur</i>	Organisation des majeurs	Organisation des mineurs	Accord suivant <i>do majeur</i>
E_0	C, e, B, e ^b , b, B ^b ,...	Chromatique descendant	Chromatique descendant	<i>mi mineur</i>
E_4	C, b, D ^b , c, D,...	Chromatique ascendant	Chromatique ascendant	<i>si mineur</i>
E_6	C, a ^b , G, e ^b , D,...	Suite de quintes	Suite de quintes	<i>la^b mineur</i>
E_9	C, g, F, c, B ^b ,...	Suite de quartes	Suite de quartes	<i>sol mineur</i>

En ce qui concerne chacune des familles d'accords, nous obtenons ici les quatre organisations possibles : par quarte, par quinte et selon les deux directions chromatiques. Dans chaque projection, l'organisation des majeurs et des mineurs est semblable.

¹⁶² La dimension de l'espace est 2, il y a 24 points, les vecteurs propres sont normalisés, le rayon est $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$.

3.3.2.3. Projections superposant certains accords

La projection dans le sous-espace E_5 associé à la valeur propre 1 superpose les tritons de même type (par exemple C et F^\sharp). Les sommets sont répartis le long d'un segment de droite, une représentation n'est pas utile.

Les projections dans les sous-espaces propres E_1 , E_2 , E_3 et E_8 (associés respectivement aux valeurs propres 1.75, 1.5, 1.354 et 0.646) ne permettent pas de distinguer les vingt-quatre accords (voir ci-dessous figure 3-29 et figure 3-30).

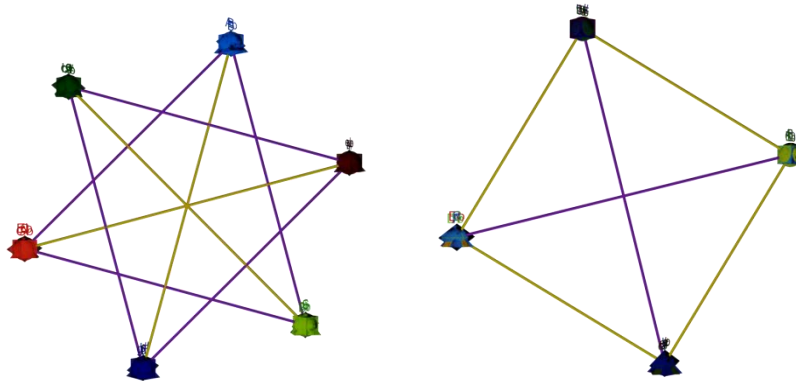


Figure 3-29 : Projections du graphe Weber 1 dans E_1 et E_2

Avec la projection dans l'espace E_1 , les accords superposés sont de même type et leurs fondamentales appartiennent au même graphe C_4 dans le système *Planet* (par exemple C, E^b , F^\sharp et A). Ce sont les symboles de même couleur dans notre système idéographique. Les accords de même fondamentale et de type différent sont diamétralement opposés (par exemple C et c).

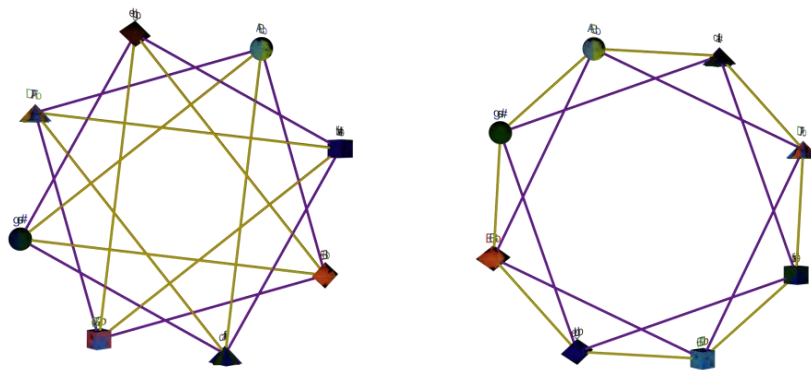


Figure 3-30 : Projections du graphe Weber 1 dans E_3 et E_8

La projection dans E_2 montre quatre superpositions. Ce sont des accords de même type dont la fondamentale appartient à la même gamme par ton (par exemple C, D, E, F^\sharp , G^\sharp et B^b). Le groupe diamétralement opposé contient les accords de même type, mais dont la fondamentale provient de l'autre gamme par tons.

En ce qui concerne les projections dans les sous-espaces propres E_3 et E_8 , illustrées en figure 3-30 ci-dessus, les points sont confondus si les accords sont de même type et si leur fondamentale appartient au même graphe C_3 dans le système *Planet*. Autrement dit, les idéogrammes de même forme et même luminosité sont superposés. Les accords de même type, mais dont la fondamentale diffère d'un triton sont opposés. La seule différence entre ces deux projections est l'ordre des sommets le long de l'octogone.

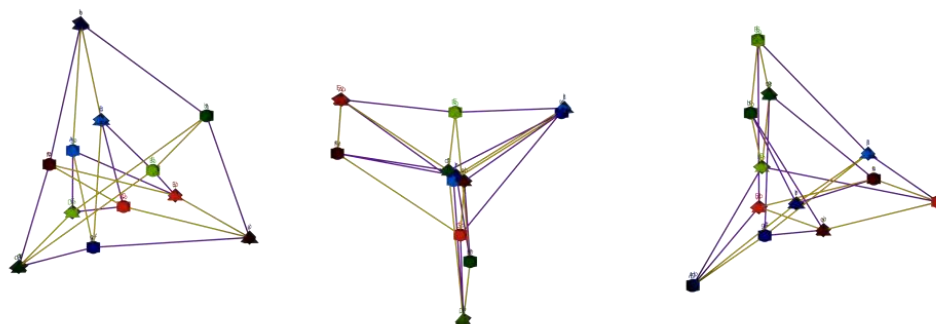


Figure 3-31 : Projection du graphe Weber 1 dans E_7

Le sous-espace propre E_7 associé à la valeur propre 0.75 est de dimension 6. Nous avons scindé la représentation en trois vues 2D orthogonales dans la figure 3-31 ci-dessus. Les vecteurs propres étant normés, les sommets du graphe, projetés dans ce sous-espace sont sur une hypersphère de dimension 6 et de rayon 0.5¹⁶³, bien que la projection ci-dessus ne montre pas de cercle. Avec cette projection, les accords de même type dont la fondamentale diffère d'un triton sont superposés.

Conclusion

Nous remarquons surtout les quatre arrangements circulaires générés de quatre manières différentes. Les autres projections planes laissent apparaître des arrangements où les accords sont groupés selon un paramètre idéographique du système *Planet*.

Cet arrangement ne concernait que les parents directs d'un accord, ainsi que le fit Weber, nous l'étendons maintenant par récurrence.

3.3.3. Weber 2 : les parents proches

Nous considérons maintenant les parents de premier et second degré dans l'espace de Weber, et nous pondérons le graphe tel que les voisins les plus proches soient deux fois plus influents que les autres voisins. Ceci correspond à la logique de Weber.

¹⁶³ La dimension de l'espace est 6, il y a 24 points, les vecteurs propres sont normalisés, le rayon est $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$.

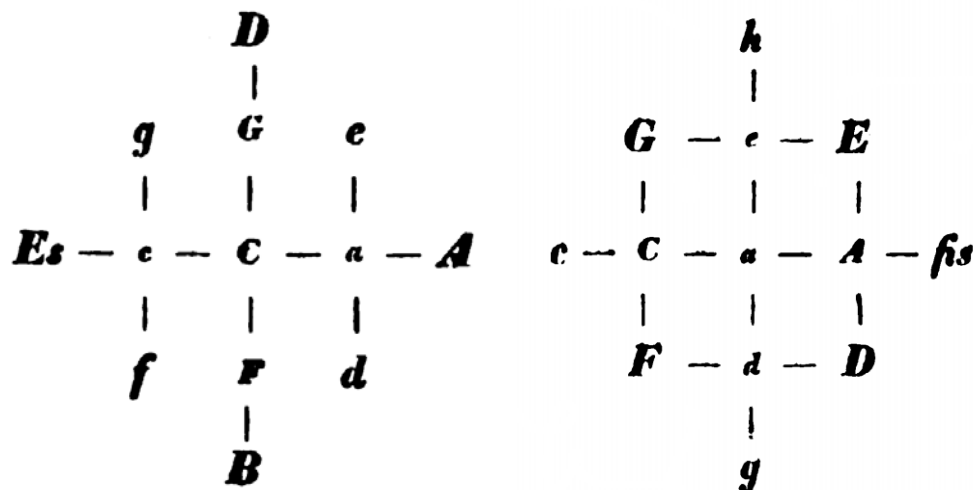


Figure 3-32 : Les parents directs et les parents proches chez Weber

La figure 3-32 ci-dessus illustre à droite les parents au premier et deuxième degré de *do majeur* ; à gauche pour *la mineur*. Les parents au premier degré seront pondérés par la valeur 2, les autres, par la valeur 1.

- Les parents au second degré de *do majeur* (C) sont : {D, E^b, B^b, A, e, g, f, d}.
- Les parents au second degré de *do mineur* (c) sont : {G, F, A^b, B^b, d, a, e^b, b^b}.

La construction du graphe se fait de façon similaire.

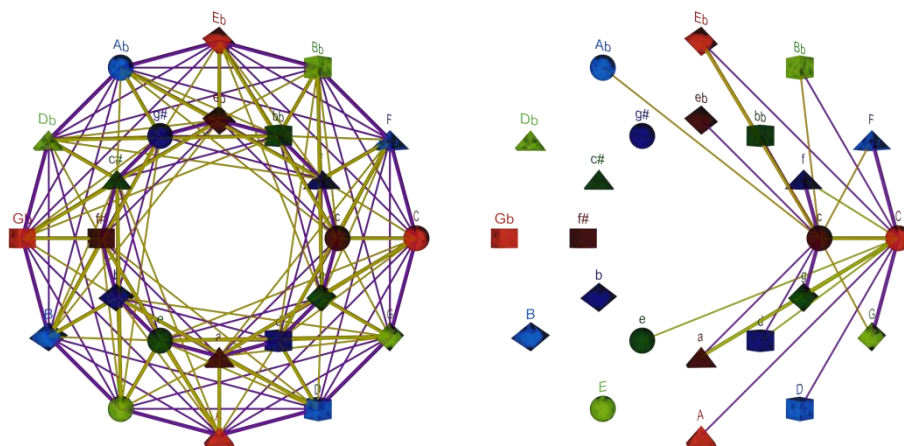


Figure 3-33 : Le graphe de Weber degré 2

La figure 3-33 ci-dessus montre, à gauche, la représentation du graphe associé à l'espace de Weber contenant les parents de premier et second degré. À droite, seules les relations vers les points C et c sont dessinées pour une meilleure lisibilité.

Ce graphe régulier d'ordre 16, à 24 sommets est pondéré, non orienté, *eulérien* et *hamiltonien* ; voici un exemple de cycle hamiltonien :

{0,2,4,1,3,5,7,9,6,8,10,12,14,16,11,13,15,17,19,22,20,18,23,21,0}.

La matrice d'adjacence associée est la suivante :

		Majeurs												Mineurs											
		C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	c	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	b
Majeurs	C	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0
	C#	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0
	D	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2
	Eb	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0
	E	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1
	F	2	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	0
	F#	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1
	G	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1
	G#	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0
	A	1	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0	1
	Bb	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0
	B	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0	2
Mineurs	c	2	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0
	c#	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1
	d	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0	1
	eb	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2	0
	e	1	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0	2
	f	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2	0
	f#	0	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0	1	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2
	g	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1	0
	g#	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0	2	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	1
	a	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	0	1	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1
	bb	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0
	b	0	0	2	0	1	0	1	1	0	1	0	2	0	1	1	0	2	0	2	0	1	1	0	0

Cette matrice, composée de 4 sous-matrices circulantes, n'est pas circulante dans sa globalité. Elle est toutefois symétrique car le graphe est non orienté : il n'y a pas de direction privilégiée.

3.3.3.1. Calcul du spectre et des sous-espaces propres

Avec les calculs effectués de façon numérique, l'étude spectrale offre les valeurs propres¹⁶⁴ du laplacien normalisé suivantes :

$\{1.302^2, 1.25^2, 1.1875^2, 1.777^2, 1.130^2, 1.0625^4, 1.051^2, 1^1, 0.948^2, 0.9375^2, 0.3911^2, 0\}$.

Nous obtenons deux espaces unidimensionnels, neuf espaces bidimensionnels et un espace à quatre dimensions.

La projection dans le sous-espace E_{11} associé à la valeur propre 0 est triviale : tous les points sont superposés.

Nous étudions maintenant les projections spectrales séparant tous les sommets du graphe.

¹⁶⁴ Les valeurs étant classées par ordre décroissant, nous numérotions les sous-espaces propres associés en fonction.

3.3.3.2. Projections séparant les 24 accords

Les projections dans les sous-espaces propres E_3 , E_4 , E_6 et E_{10} (associés respectivement aux valeurs propres 1.178, 1.130, 1.051 et 0.391) permettent de distinguer les vingt-quatre accords. Voir ci-dessous figure 3-34 et figure 3-35.

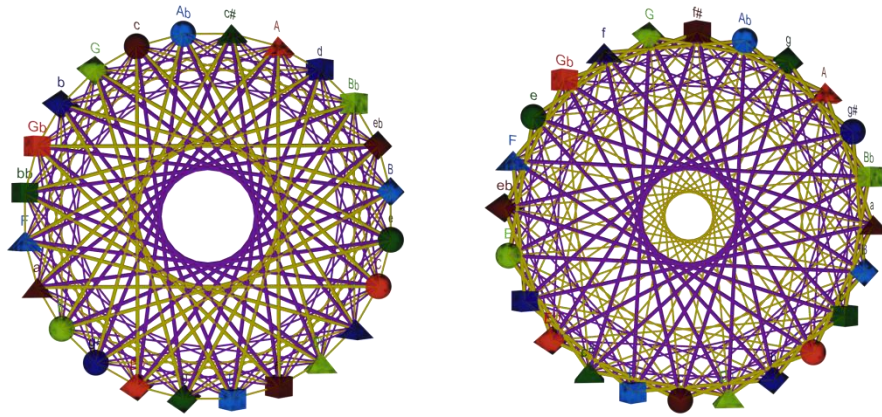


Figure 3-34 : Projections du graphe Weber 2 dans E_3 et E_4

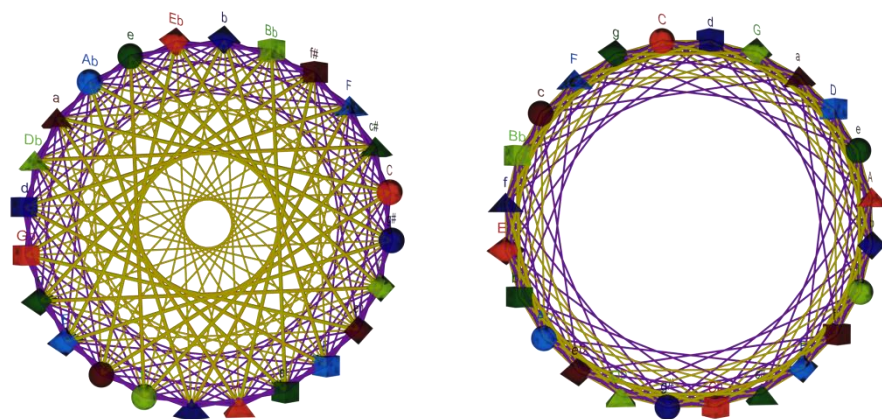


Figure 3-35 : Projections du graphe Weber 2 dans E_0 et E_{10}

Pour ces quatre projections, la matrice étant circulante, les 24 accords sont disposés le long d'un cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{12}}$ ¹⁶⁵. La différence entre ces projections concerne la disposition des sommets du graphe le long du cercle. En parcourant le cercle depuis *do majeur* dans le sens positif, nous avons toujours une alternance des types d'accords (*majeur/mineur*). Le tableau 3-4 ci-dessous récapitule les différences entre ces quatre projections.

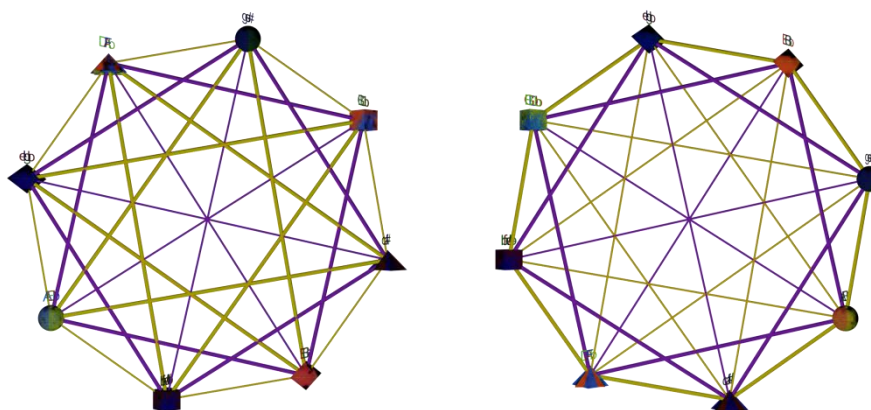
¹⁶⁵ La dimension de l'espace est 2, il y a 24 points, les vecteurs propres sont normalisés, le rayon est $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{24}}$.

Tableau 3-4 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe de Weber 2

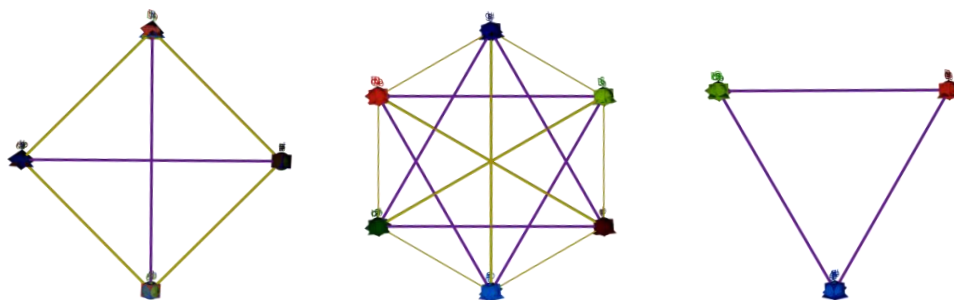
Projection	Suite depuis <i>do</i> majeur	Organisation des majeurs	Organisation des mineurs	Accord suivant <i>do</i> majeur
E ₃	C, e, B, e ^b , b, B ^b ,...	Chromatique descendant	Chromatique descendant	<i>mi</i> mineur
E ₄	C, b ^b , B, a, B ^b ,...	Chromatique descendant	Chromatique descendant	<i>si^b</i> mineur
E ₆	C, f [#] , F, b, B ^b ,...	Suite de quarts	Suite de quarts	<i>fa[#]</i> mineur
E ₁₀	C, g, F, c, B ^b ,...	Suite de quarts	Suite de quarts	<i>sol</i> mineur

A la différence du graphe Weber 1, nous n'obtenons ici que deux des quatre organisations possibles : par quarte et chromatiques descendant, il n'y a que deux sens de parcours : chromatique descendant ou par quarte.

3.3.3.3. Projections superposant certains accords

Figure 3-36 : Projections du graphe Weber 2 dans E₀ et E₈

La figure 3-30 ci-dessus illustre les projections du graphe Weber 2 dans les sous-espaces propres E₀ et E₈. Les sommets du graphe sont confondus si les accords sont de même type et si leur fondamentale appartient au même graphe C₃ dans le système *Planet*. Autrement dit, les idéogrammes de même forme et même luminosité sont superposés. Les accords de même type, mais dont la fondamentale diffère d'un triton, sont opposés. La seule différence entre ces deux projections est l'ordre des sommets le long de l'octogone. Ces projections sont analogues à celles du graphe Weber 1 dans ses sous-espaces E₃ et E₈.

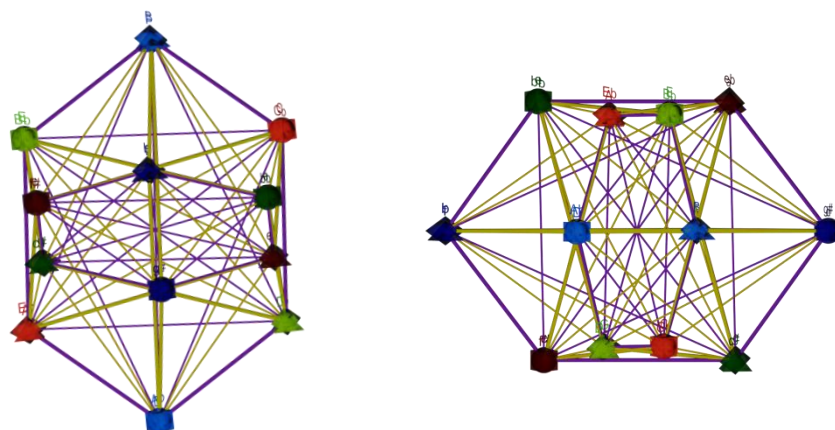
Figure 3-37 : Projections du graphe Weber 2 dans E_1 , E_2 et E_9

Avec la figure 3-37 ci-dessus illustrant les projections dans les sous-espaces E_1 , E_2 et E_9 , nous retrouvons les formes habituelles.

La projection dans E_1 montre quatre superpositions. Ce sont des accords de même type dont la fondamentale appartient à la même gamme par ton (par exemple C, D, E, F $^\sharp$, G $^\sharp$ et B $^\flat$). Le groupe diamétralement opposé contient les accords de même type, mais dont la fondamentale provient de l'autre gamme par tons.

Avec la projection dans l'espace E_2 , les accords superposés sont de même type et leurs fondamentales appartiennent au même graphe C_4 dans le système *Planet* (par exemple C, E $^\flat$, F $^\sharp$ et A). Ce sont les symboles de même couleur dans notre système idéographique. Les accords de même fondamentale et de type différent sont diamétralement opposés (par exemple C et c).

La projection dans E_9 montre trois groupes d'accords superposés. Ce sont des accords de même type dont la fondamentale appartient au même graphe C_4 dans le système *Planet*. Les idéogrammes de même couleur, sombre ou claire, sont superposés.

Figure 3-38 : Projection du graphe Weber 2 dans E_5

Le sous-espace propre E_5 associé à la valeur propre 1.0625 est de dimension 4. Nous avons scindé la représentation en deux vues 2D orthogonales dans la figure 3-38 ci-dessus. Les vecteurs propres étant normalisés, les sommets du graphe, projetés dans ce sous-espace sont sur

une hypersphère de dimension 4 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{6}}^{166}$, même si la projection ci-dessus ne montre pas de cercle. Avec cette projection, Les accords de même type dont la fondamentale diffère d'un triton sont superposés.

Conclusion

Les projections de ce graphe sont semblables à celles du niveau précédent. Nous étendons une dernière fois l'ensemble des parents par récurrence.

3.3.4. Weber 3 : les parents éloignés

Nous considérons désormais les premiers, seconds et troisièmes voisins dans l'espace de Weber, et nous pondérons les voisins immédiats avec 3, les seconds voisins avec 2 et les voisins du troisième ordre, dits éloignés, avec 1. Afin de respecter l'idée de Weber, nous n'additionnons pas les coefficients si deux accords sont parents deux fois (par exemple C et A sont voisins d'ordre 2 et d'ordre 3) mais retenons le voisinage le plus proche¹⁶⁷. La figure 3-39 ci-dessous illustre à droite les voisins de premier, deuxième et troisième degré pour l'accord de *do majeur*, à gauche pour *la mineur*.

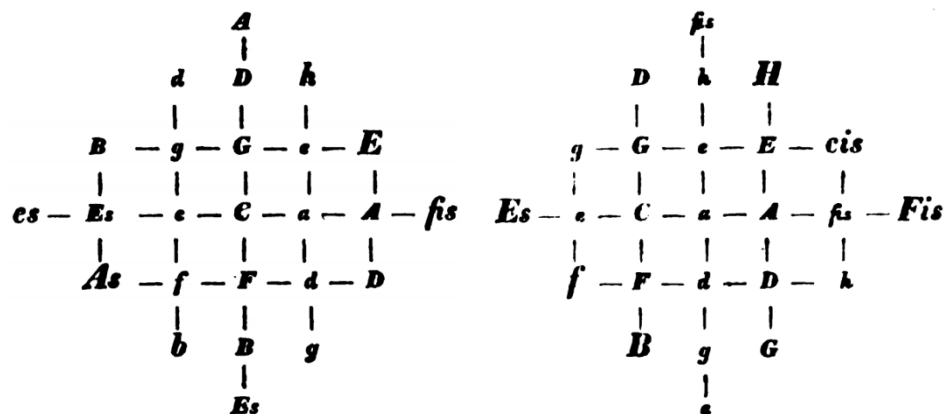


Figure 3-39 : Les accords parents éloignés chez Weber

Les parents au premier degré seront pondérés par la valeur 3, ceux du second degré par 2, et les derniers par 1.

- Les parents au troisième degré de *do majeur* (C) sont : $\{E, A^b, e^b, f^\sharp, b^b, b\}$.
- Les parents au troisième degré de *do mineur* (c) sont : $\{A, D, C^\sharp, F^\sharp, e, g^\sharp\}$.

La construction du graphe se fait encore de façon similaire.

¹⁶⁶ La dimension de l'espace est 4, il y a 24 points, les vecteurs propres sont normalisés, le rayon est $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{24}}$.

¹⁶⁷ "So kommt ihre Verwandschaft dritten Grades nicht mehr im Anschlag": ainsi leur parenté au troisième degré n'est plus prise en compte.

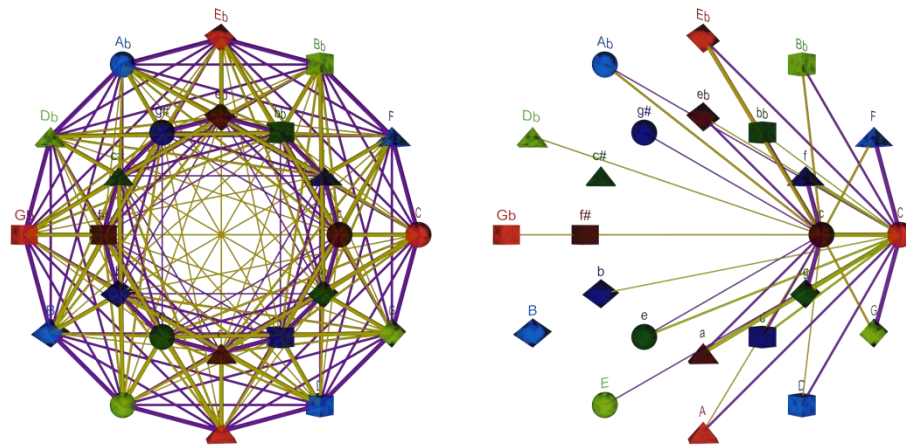


Figure 3-40 : Le graphe de Weber degré 3

La figure 3-33 ci-dessus montre, à gauche, la représentation du graphe associé à l'espace de Weber contenant tous les accords. A droite, seules les relations vers les points C et c sont dessinées pour une meilleure lisibilité.

La matrice d'adjacence associée est la suivante :

		Majeurs												Mineurs											
		C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	c	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	b
Majeurs	C	0	0	2	2	1	3	0	3	1	2	2	0	3	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1
	C#	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1	2	2	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1
	D	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1	2	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	3
	Eb	2	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1	3	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0
	E	1	2	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	0	3	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2
	F	3	1	2	2	0	0	0	2	2	1	3	0	2	0	3	1	1	3	0	2	1	2	2	1
	F#	0	3	1	2	2	0	0	0	2	2	1	3	1	2	0	3	1	1	3	0	2	1	2	2
	G	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	2	1	2	1	2	0	3	1	1	3	0	2	1	2
	G#	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	2	2	2	1	2	0	3	1	1	3	0	2	1
	A	2	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1	3	0	2
	Bb	2	2	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1	3	0
	B	0	2	2	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1	3
Mineurs	c	3	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1	2	2	0
	c#	0	3	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1	2	2
	d	2	0	3	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1	2
	eb	1	2	0	3	1	1	3	0	2	1	2	2	2	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3	1
	e	2	1	2	0	3	1	1	3	0	2	1	2	1	2	2	0	0	0	2	2	1	3	0	3
	f	2	2	1	2	0	3	1	1	3	0	2	1	3	1	2	2	0	0	0	2	2	1	3	0
	f#	1	2	2	1	2	0	3	1	1	3	0	2	0	3	1	2	2	0	0	0	2	2	1	3
	g	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1	3	0	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	2	1
	g#	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1	3	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2	2
	a	3	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	1	2	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0	2
	bb	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	3	1	2	2	1	3	0	3	1	2	2	0	0	0
	b	1	1	3	0	2	1	2	2	1	2	0	3	0	2	2	1	3	0	3	1	2	2	0	0

Cette matrice, composée de 4 sous-matrices circulantes, n'est pas circulante dans sa globalité. Elle est toutefois symétrique car le graphe est non orienté : il n'y a pas de direction privilégiée.

Ce graphe régulier d'ordre 34, à 24 sommets, est pondéré, non orienté, eulérien et hamiltonien ; voici un exemple de cycle hamiltonien :

$$\{0, 2, 4, 1, 3, 5, 7, 9, 6, 8, 10, 12, 14, 11, 13, 15, 17, 19, 16, 18, 21, 23, 20, 22, 0\}.$$

3.3.4.1. Calcul du spectre et des sous-espaces propres

Avec les calculs effectués de façon numérique, l'étude spectrale offre les valeurs propres du laplacien normalisé suivantes :

$$\{1.169^2, 1.147^2, 1.128^2, 1.119^2, 1.118^2, 1.100^2, 1.067^2, 1.059^1, 1.030^2, 1.017^2, 0.971^2, 0.606^2, 0\}.$$

Nous obtenons deux espaces unidimensionnels, et onze espaces bidimensionnels.

La projection dans le sous-espace E_{12} associé à la valeur propre 0 est triviale : tous les points sont superposés.

Nous étudions maintenant les projections spectrales séparant tous les sommets du graphe.

3.3.4.2. Projections séparant les 24 accords

Les projections dans les sous-espaces propres E_2 , E_3 , E_8 et E_{11} (associés respectivement aux valeurs propres 1.128, 1.119, 1.030 et 1.606) permettent de distinguer les vingt-quatre accords. Voir ci-dessous figure 3-41 et figure 3-42 ¹⁶⁸.

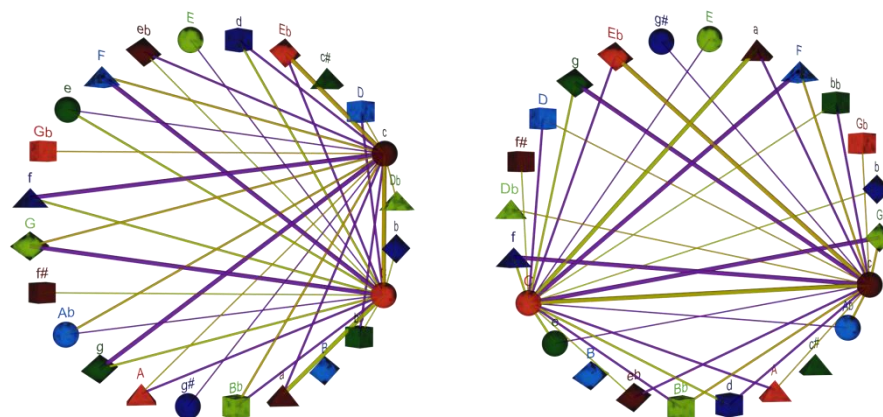
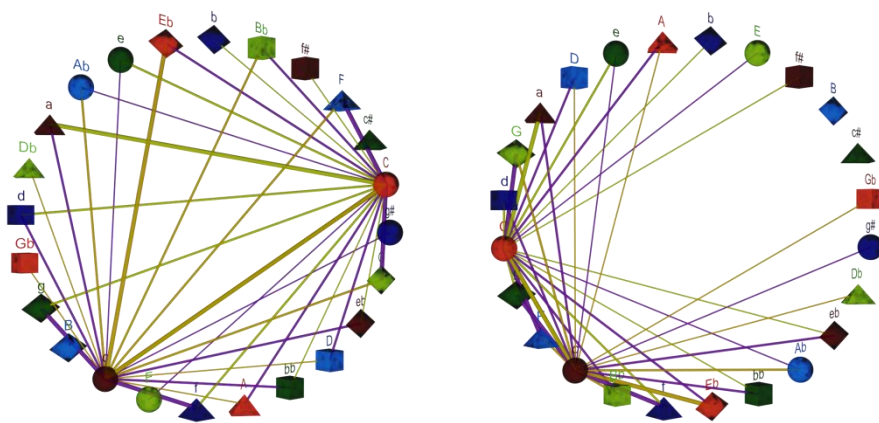


Figure 3-41 : Projections du graphe Weber 3 dans E_2 et E_3 , *do* seulement

¹⁶⁸ Comme le graphe est presque complet, les illustrations des projections dans les sous-espaces séparant chaque point seraient surchargées si l'on dessinait toutes les arêtes du graphe. Ainsi pour ces quatre cas, nous ne représentons que les voisins de C et c .

Figure 3-42 : Projections du graphe Weber 3 dans E_8 et E_{11} , *do* seulement

Pour ces quatre projections, la matrice étant circulante, les 24 accords sont disposés le long d'un cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{12}}$. La différence entre ces projections concerne la disposition des sommets du graphe le long du cercle. En parcourant le cercle depuis *do majeur* dans le sens positif, nous avons toujours une alternance des types d'accords (majeur/mineur). Le tableau 3-5 ci-dessous récapitule les différences entre ces quatre projections.

Tableau 3-5 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe de Weber 3

Projection	Suite depuis <i>do majeur</i>	Organisation des majeurs	Organisation des mineurs	Accord suivant <i>do majeur</i>
E_2	C, b, D ^b , c, D,...	Chromatique ascendant	Chromatique ascendant	<i>si mineur</i>
E_3	C, e, B, e ^b , B ^b ,...	Chromatique descendant	Chromatique descendant	<i>mi mineur</i>
E_8	C, c [#] , F, f [#] , B ^b ,...	Suite de quarts	Suite de quarts	<i>do[#] mineur</i>
E_{11}	C, g, F, c, B ^b ,...	Suite de quarts	Suite de quarts	<i>sol mineur</i>

A la différence du précédent graphe, pour les espaces séparant les vingt-quatre accords, il n'y a que deux sens de parcours : chromatique descendant ou par quarts.

A la différence du graphe Weber 1, nous n'obtenons ici que deux des quatre organisations possibles : par quarts et chromatique descendant.

3.3.4.3. Projections superposant certains accords

En projetant le graphe dans chacun des sous-espaces, nous obtenons les formes habituelles.

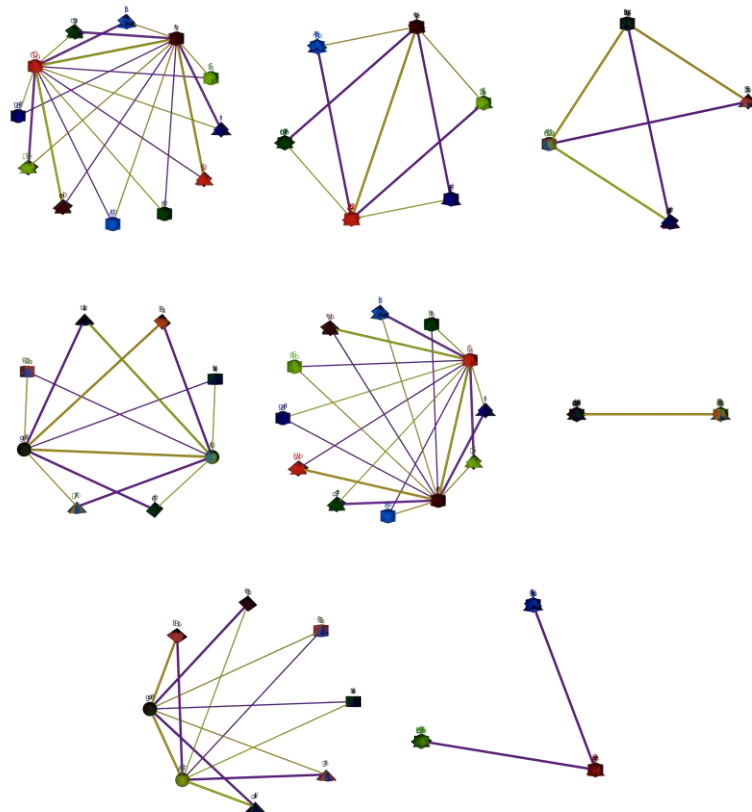


Figure 3-43 : Projections du graphe Weber 3 dans $E_0, E_1, E_4, E_5, E_6, E_7, E_9$ et E_{10} , *do* seulement

La figure 3-43 ci-dessus fait état des projections dans lesquelles les sommets sont superposés par groupes. Nous n'avons représentées que les arêtes associées aux points "C" et "c" pour ne pas surcharger le dessin. Nous remarquons pour E_0 et E_6 , la répartition le long d'un dodécagone ; pour E_1 , l'hexagone ; pour E_4 , le carré ; pour E_5 et E_9 , l'octogone et, pour E_{10} , le triangle. La projection dans E_7 sépare les accords en deux groupes selon leur type.

Les formes sont celles rencontrées pour les graphes Weber 1 et Weber 2 étudiés précédemment.

Conclusion

Avec les trois niveaux de parenté, nous remarquons toujours les quatre arrangements circulaires générés de manières différentes. Les autres projections planes laissent apparaître des arrangements où les accords sont groupés selon un paramètre idéographique du système *Planet*.

3.3.5. Douthett et Steinbach : le *Chicken Wire*

Créée par Jack Douthett et Peter Steinbach, cette illustration représente l'espace dual du *Tonnetz* (voir ci-dessous, figure 3-44). Les sommets des hexagones matérialisent les accords parfaits ; les liaisons entre sommets symbolisent les transformations P,L,R¹⁶⁹ entre accords ; les centres des hexagones représentent les classes de hauteurs .

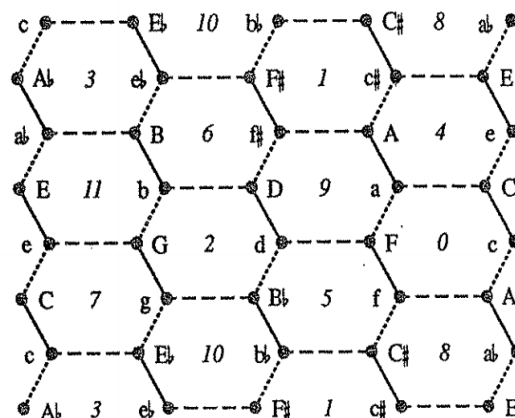


Figure 3-44 : Le *Chicken Wire* de Jack Douthett et Peter Steinbach¹⁷⁰

Nous pouvons représenter le graphe de Douthett et Steinbach selon la figure 3-45 suivante¹⁷¹ à gauche en arrangeant les sommets, comme nous l'avons fait précédemment, selon deux dodécagones. A droite, seules les relations vers les points C et c sont dessinées pour une meilleure lisibilité.

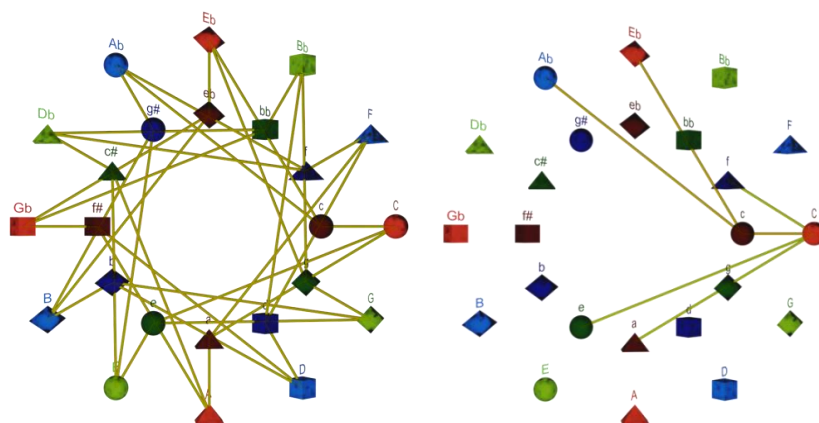


Figure 3-45 : Le *Chicken Wire* sous forme de graphe à 24 sommets dans le système *Planet*

Le graphe est régulier¹⁷² d'ordre 3. Il est hamiltonien. Nous avons trouvé 124 cycles hamiltoniens¹⁷³. On reconnaîtra le cycle #4 utilisé pour

¹⁶⁹ Voir (Lewin, 1987).

¹⁷⁰ Image issue de (Douthett & Steinbach, 1998) reproduite avec l'aimable autorisation des auteurs.

¹⁷¹ Avec cette représentation, l'appellation *Chicken Wire* n'a plus de sens.

¹⁷² Ce sont les trois relations P,L,R néo-riemanniennes.

la composition *Corale #4* de Giovanni Albini et illustrée avec l'*Hypersphère des Accords* dans cette étude au chapitre 3.5.4.

Sa matrice d'adjacence est :

		Majeurs												Mineurs											
		C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	c	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	b
Majeurs	C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	C#	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	Eb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
	F#	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
	G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
	G#	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	Bb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
Mineurs	c	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	c#	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	d	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	eb	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	e	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f#	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	g#	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	a	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	bb	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	b	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 3-46 : La matrice du graphe associé au *Chicken Wire*

Nous remarquons que la matrice n'est pas circulante dans sa globalité mais qu'elle est constituée de 4 sous-matrices circulantes. Les sous-matrices concernant les relations entre accords de même nature sont nulles.

Nous appliquons la même méthode qu'avec les espaces d'accords précédents et obtenons les résultats suivants :

Le spectre de son laplacien normalisé est

$$\{2^1, 1.7454^2, 1.6440^2, 1.5774^2, 1.3333^3, 1.3173^2, 0.8275^2, 0.6667^3, 0.4226^2, 0.3560^2, 0.2546^2\}.$$

Soit λ_j la valeur propre, (avec j variant de 0 à 11) dans l'ensemble précédent où elles sont triées par ordre décroissant. Nous remarquons que $\lambda_j + \lambda_{11-j} = 2$ (avec j variant de 1 à 5). Par exemple $\lambda_1 + \lambda_{10} = 1.7454 + 0.2546 = 2$. Nous allons analyser ensemble les espaces propres associés à

¹⁷³ Les 124 cycles répertoriés par *Mathematica*TM correspondent aux 62 cycles non orientés de Giovanni Albini et Samuele Antonini (Albini & Antonini, 2009) découverts avec le logiciel Group and Graphs. Nous comptons les cycles orientés et obtenons logiquement exactement le double.

λ_j et λ_{11-j} . C'est à dire E_0 ; E_1 et E_{10} ; E_2 et E_9 ; E_3 et E_8 ; E_4 et E_7 et enfin E_5 et E_6 .



Figure 3-47 : Projection du *Chicken Wire* dans E_0

Le premier sous-espace propre E_0 , associé à la valeur propre 2, n'a qu'une dimension, l'image rendue superpose les accords de même type (voir ci-dessus, figure 3-47).

3.3.5.1. Projections séparant les 24 accords

Les projections dans les sous-espaces propres E_2 , E_9 , E_5 et E_6 permettent de distinguer les vingt-quatre accords (voir ci-dessous figure 3-34 et figure 3-35).

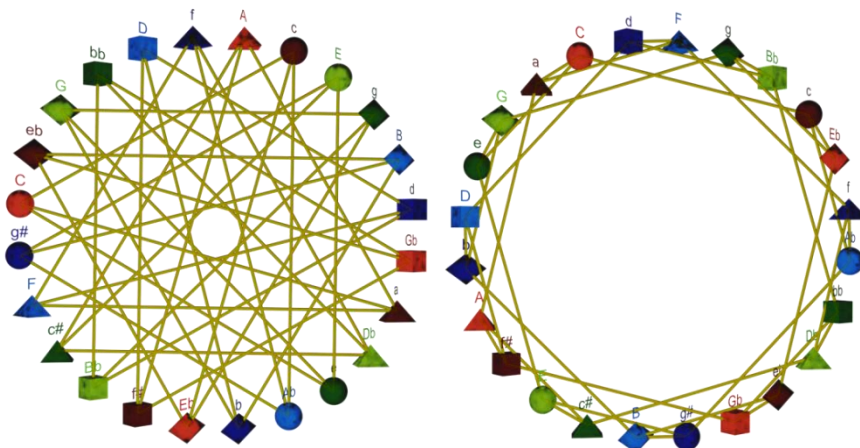


Figure 3-48 : Projections du *Chicken Wire* dans E_2 et E_9

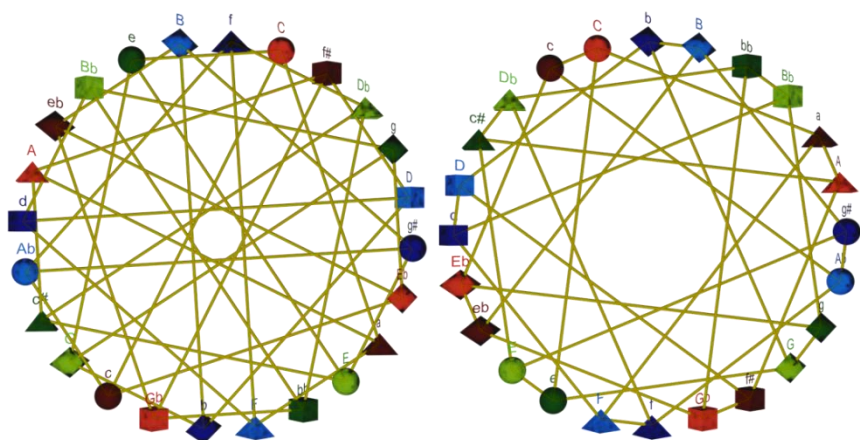


Figure 3-49 : Projections du *Chicken Wire* dans E_5 et E_6

Les projections dans les sous-espaces E_2 et E_9 associés aux valeurs propres 1.6440 et 0.3560 montrent deux cercles des quarts imbriqués. Dans E_1 , en lisant les accords le long du cercle nous obtenons une progression similaire à celle employée par Beethoven (Cohn, 1992) $\{c, A, f, D, \dots\}$ mais avec majeur et mineur intervertis $\{C, a, F, d, \dots\}$. Dans ce cas l'enchaînement n'est pas constitué de relations L,R et sa perception musicale plutôt insolite. Dans E_2 , nous avons une suite de couples {majeur, relative mineure} progressant par quinte (renversement de la quarte).

Les sous-espaces bidimensionnels E_5 et E_6 associés aux valeurs propres 1.3202 et 1.2571 sont similaires. Les projections font apparaître deux cercles chromatiques imbriqués : l'un contenant les accords majeurs, l'autre les mineurs tournant dans le même sens. Avec E_1 les progressions sont ascendantes, avec E_2 , elles sont descendantes. Le graphe n'est pas eulérien, il n'y a pas de parcours utilisant chacune des 72 relations P,L,R.

Le tableau 3-6 ci-dessous récapitule les organisations des sommets dans les projections séparant les vingt-quatre accords.

Tableau 3-6 : Projections séparant les 24 accords dans le graphe *Chicken Wire*

Projection	Suite depuis <i>do majeur</i>	Organisation des majeurs	Organisation des mineurs	Accord suivant <i>do majeur</i>
E_2	C, g [#] , F, c [#] , G,...	Suite de quarts	Suite de quarts	<i>sol[#] mineur</i>
E_9	C, a, G, e, D,...	Suite de quintes	Suite de quintes	<i>la mineur</i>
E_5	C, f, B, e, B ^b ,...	Chromatique descendant	Chromatique descendant	<i>fa mineur</i>
E_6	C, c, D ^b , d ^b , D,...	Chromatique ascendant	Chromatique ascendant	<i>do mineur</i>

A l'instar du graphe Weber 1, en ce qui concerne chacune des familles d'accords, nous obtenons ici les quatre organisations possibles : par quarte, par quinte et selon les deux directions chromatiques. Dans chaque projection, l'organisation des majeurs et des mineurs est semblable.

3.3.5.2. Projections superposant certains accords

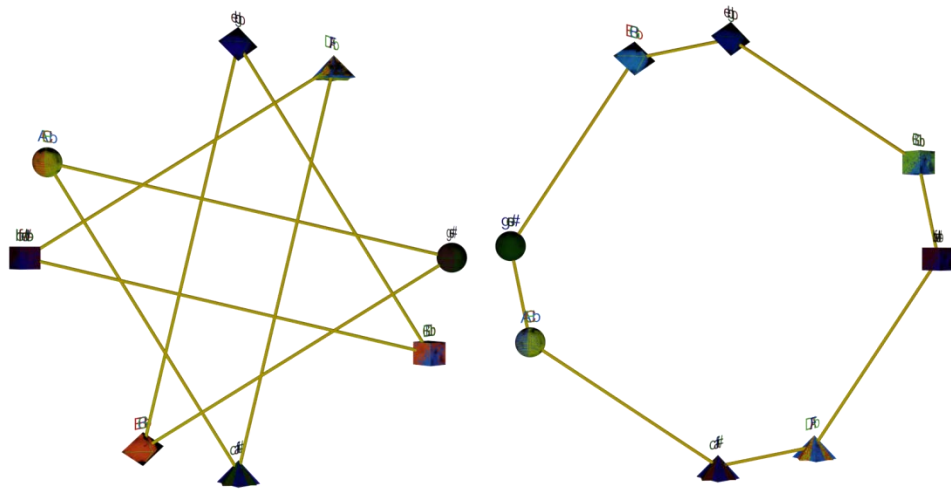


Figure 3-50 : Projections du *Chicken Wire* dans E_1 et E_{10}

Les projections dans les sous-espaces E_1 et E_{10} , associés aux valeurs propres 1.7454 et 0.2546, montrent huit groupes contenant les accords de même type dont la fondamentale appartient au même graphe C_4 dans le modèle *Planet* (voir ci-dessus figure 3-50). Ces groupes sont placés selon quatre couples de sommets voisins dans un dodécagone, répartis symétriquement.

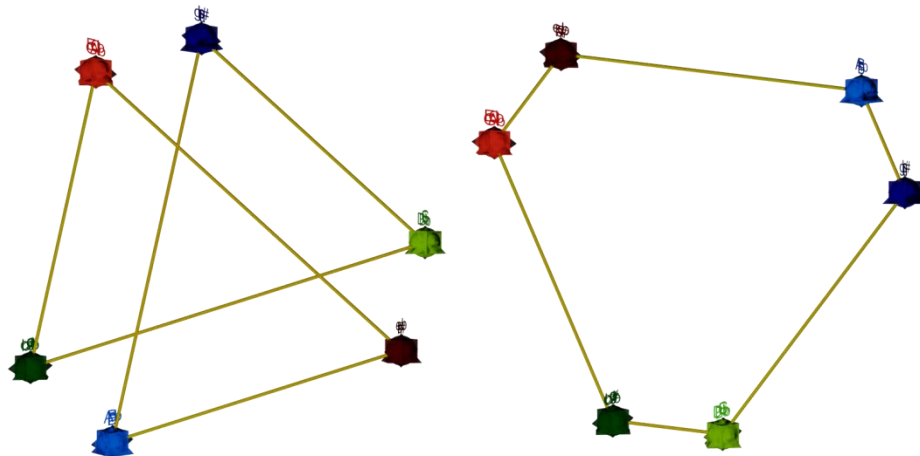
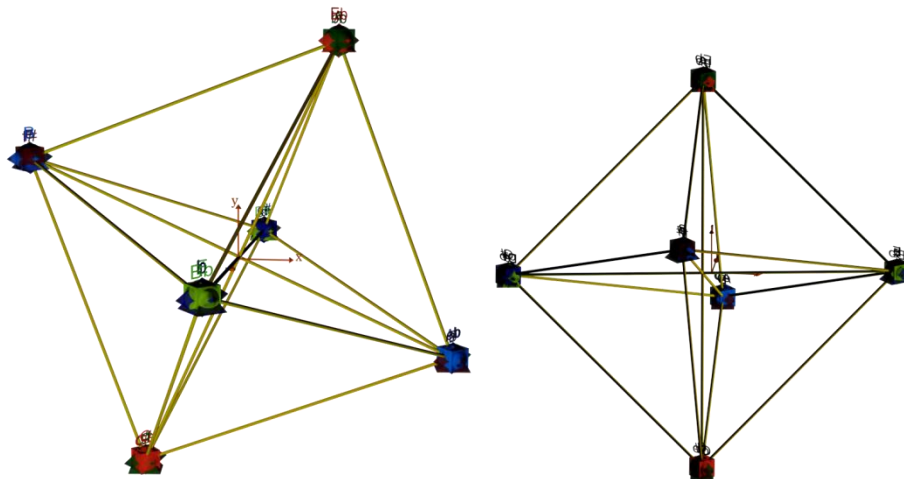
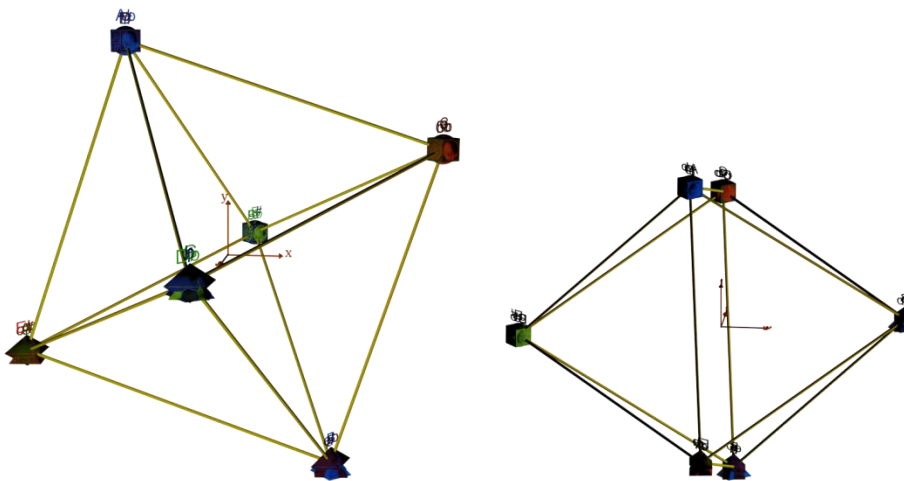


Figure 3-51 : Projections du *Chicken Wire* dans E_3 et E_8

Les projections dans les sous-espaces E_3 et E_8 , associés aux valeurs propres 1.5774 et 0.4226, montrent six groupes contenant les accords de même type dont la fondamentale appartient au même graphe C_3 dans le modèle *Planet* (voir ci-dessus figure 3-51). Ces groupes sont placés selon trois couples de sommets voisins dans un dodécagone, répartis symétriquement.

Figure 3-52 : Projection du *Chicken Wire* dans E_4

La figure 3-52 ci-dessus représente deux vues de la projection spectrale dans le sous-espace tridimensionnel E_4 associé à la valeur propre 1.3333. Les accords $\{C, g\}$ et leurs tritons respectifs. $\{F^\sharp, c^\sharp\}$ sont superposés. Les huit groupes ainsi formés sont répartis sur les sommets d'un octaèdre.

Figure 3-53 : Projection du *Chicken Wire* dans E_7

E_7 associé à la valeur propre 0.6667 est similaire à E_4 . La projection présente la même répartition de groupes selon les sommets d'un octaèdre (voir ci-dessus figure 3-53). Le groupe contenant C contient $\{C, e\}$ et les tritons associés $\{F^\sharp, a^\sharp\}$.

3.3.6. Weitzmann : les schémas de modulations

3.3.6.1. Weitzmann et le modèle *Planet*

Carl Friedrich Weitzmann (1808-1880) est un théoricien de la musique qui proposa un arrangement des "Douze sons de notre système" (Weitzmann, 1853) illustrée ci-dessous¹⁷⁴.



Figure 3-54 : Les "Douze sons de notre système" selon Weitzmann

C'est la répartition utilisée dans le modèle *Planet* sans son système idéographique et dans un cadre purement tonal. Nous n'allons pas reconstruire le *Graphe Planet* déjà étudié dans ce mémoire (voir chapitre 2.2), mais utiliser une autre partie des travaux de Weitzmann.

3.3.6.2. Weitzmann, le modèle *Planet* et les cycles de Cohn

A partir des travaux de Weitzmann, Richard Cohn interprète les "quatre régions" de ce dernier et construit un graphe qu'il baptise le "*graphe de Weitzmann*". Il compare les régions à ses cycles hexatoniques et montre que le *graphe de Weitzmann* est un sous-graphe du *Cube Dance*¹⁷⁵.

¹⁷⁴ L'idée de l'étude d'une partie des travaux de Weitzmann fait suite à une entrevue avec Richard Cohn (Paris, 16.06.2011), qui m'indiqua que mon modèle Planet est l'un des descendants des travaux de ce dernier qui fut l'un des inspirateurs de Riemann. Pour plus de détails concernant l'importance historique de Weitzmann et son intégration dans le domaine mathémusical, voir l'article de Richard Cohn (Cohn, 2000).

¹⁷⁵ Les cycles hexatoniques de Cohn sont définis dans (Cohn, 1996). Le graphe *Cube Dance* est présenté dans (Douthett & Steinbach, 1998).

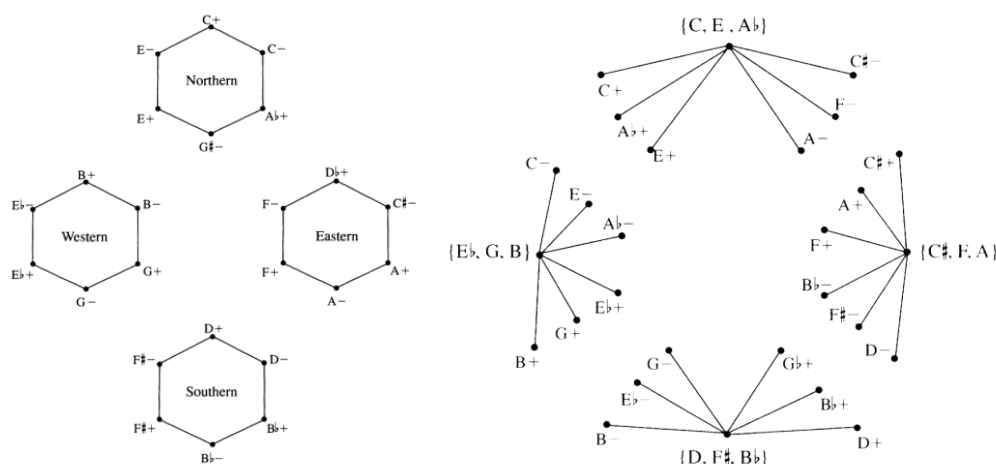


Figure 3-55 : Les régions hexatoniques et le *graphe de Weitzmann* définis par Richard Cohn

Dans la figure 3-55 ci-dessus, nous avons reproduit, avec l'aimable autorisation de l'auteur, les images issues de (Cohn, 2000) : à gauche, les régions hexatoniques ; à droite le *graphe de Weitzmann*¹⁷⁶. A priori le *graphe de Weitzmann* n'a pas suscité notre intérêt en tant qu'objet combinatoire : il n'est ni circulant, ni sommet-transitif, ni régulier, ni connexe,... mais il est constitué de quatre sous-graphes étoile (S_7) disjoints et interchangeable. Les étoiles possèdent un sommet central. Sans ce dernier, même ci-cela présente peu de sens, elles sont circulantes.

Nous plongeons le *graphe de Weitzmann* dans le modèle *Planet*. Les centres des étoiles sont les quatre triades augmentées, elles correspondent aux quatre faces triangulaires du modèle *Planet*. Les six autres sommets des quatre graphes étoiles correspondent aux six accords les plus proches de ce triangle sur l'*Hypersphère des Accords*¹⁷⁷. Par analogie aux régions de Cohn nous appelons *étoile nord*, le graphe étoile dont le centre est l'accord $\{0,4,8\}$, *étoile sud*, le graphe étoile dont le centre est l'accord $\{2,6,10\}$; *étoile est*, le graphe étoile dont le centre est l'accord $\{3,7,10\}$, et *étoile ouest*, le graphe étoile dont le centre est l'accord $\{1,5,9\}$. Ces graphes étoile sont aussi des sous-graphes du *Cube Dance* que reproduisons ci-dessous figure 3-56¹⁷⁸.

Le *Cube Dance* peut par conséquent aussi être plongé dans le modèle *Planet*. Il n'a pas été projeté spectralement car il n'est pas sommet-transitif.

Nous calculons la distance entre chacun des accords parfaits et le centre du triangle formé par les points $\{0,4,8\}$. Les résultats se déduisent trivialement des coordonnées des notes du modèle *Planet* formulées au chapitre 2.3.2, nous les présentons dans le tableau 3-7 ci-dessous.

¹⁷⁶ Richard Cohn utilise une notation différente de notre notation Jazz : $C+$ signifie *do majeur* ; $C-$, *do mineur*.

¹⁷⁷ Il s'agit de calcul de distance dans le modèle *Planet*. Le centre d'une triade augmentée n'est pas visualisé en animation il n'est pas sur la sphère (voir chapitre 2.6.5.4) mais le point existe dans la boule en 4D.

¹⁷⁸ Image issue de (Douthett & Steinbach, 1998) reproduite avec l'aimable autorisation des auteurs.

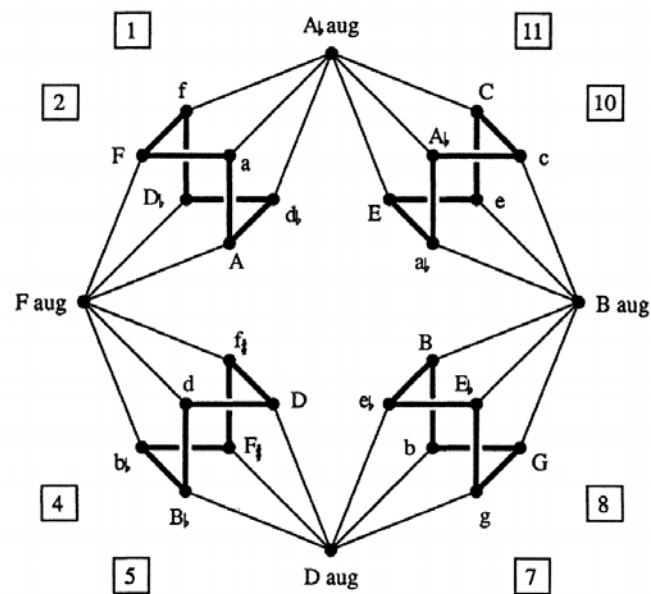
Figure 3-56 : Le *Cube Dance* de Douthett et Steinbach

Tableau 3-7 : Régions de Cohn, étoiles et distances dans l'hypersphère

Accords	Distance carrée à $\{0,4,8\}$ dans le modèle <i>Planet.</i>	Accords selon les régions hexatoniques de Cohn	Accords selon les étoiles du <i>graphe de Weitzmann</i>	Zone dans le <i>Cube Dance</i>
C, E, G [#] , d ^b , f, a	$\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (0.467) Distance minimale	Majeurs de la région nord et mineurs de la région est.	Majeurs et mineurs de l'étoile nord.	11 1
A, D ^b , F, c, e, g [#]	$\frac{5}{6}$ (0.833)	Majeurs de la région est et mineurs de la région nord.	Majeurs de l'étoile est, et mineurs de l'étoile ouest.	2 10
E ^b , G, B, d, f [#] , b ^b	$\frac{11}{6}$ (1.833)	Majeurs de la région ouest et mineurs de la région sud.	Majeurs de l'étoile ouest, et mineurs de l'étoile est.	8 4
D, F [#] , B ^b , e ^b , g, b	$\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2.199) Distance maximale	Majeurs de la région sud et mineurs de la région ouest.	Majeurs et mineurs de l'étoile sud.	5 7

Dans le modèle *Planet*, les accords les plus proches physiquement du centre de l'étoile nord sont les accords de l'étoile nord; les plus éloignés sont les accords de l'étoile sud¹⁷⁹. Nous retrouvons ici une invariance qui associe proximité selon Weitzmann et proximité dans l'espace. Cette invariance se retrouve en classant les zones du *Cube Dance* selon leur proximité par rapport au point supérieur (l'accord {0,4,8}).

Richard Cohn a démontré l'analogie entre les régions de Weitzmann, ses cycles et le graphe *Cube Dance*. Nous avons établi une correspondance entre le modèle *Planet*, les cycles de Cohn, le *graphe de Weitzmann*, et le *Cube Dance*.

Conclusion

Dans le modèle *Planet*, les quatre groupes de six accords parfaits les plus proches physiquement d'une même triade augmentée correspondent à

- quatre *régions de Weitzmann* ;
- quatre étoiles, sous-graphes du *graphe de Weitzmann* ;
- quatre groupes de deux zones du *Cube Dance*.

3.3.6.3. Les schémas de modulation de Weitzmann

Le *graphe de Weitzmann* défini par Richard Cohn et présenté précédemment, n'est ni circulant ni sommet-transitif¹⁸⁰. Il ne se prête pas à la projection spectrale. Nous construisons un autre graphe à partir du schéma de modulations issu du manuel de théorie musicale (Weitzmann & Bowman, 1879, p. 284), (voir ci-dessous, figure 3-57).

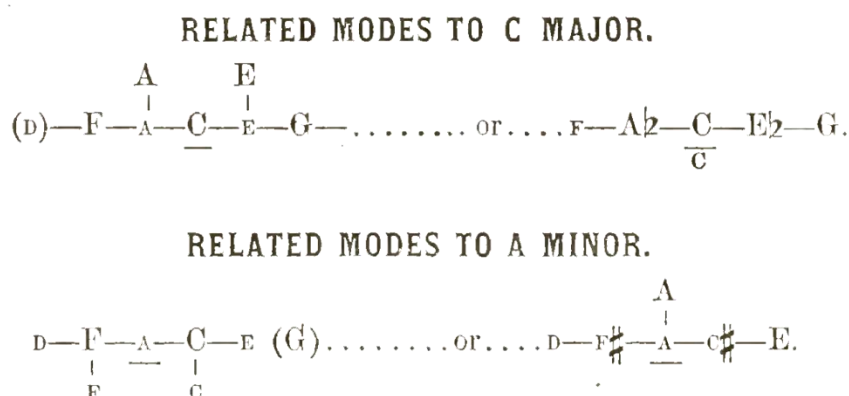


Figure 3-57 : Le schéma de modulations de Weitzmann

Ce schéma est issu du dernier chapitre dont le titre original est "*concerning the modulations or changing of key in a composition*". Weitzmann s'inscrit dans un contexte tonal, un demi-siècle avant le célèbre *Tonnetz* de Riemann. Il s'agit de modulations entre différents mouvements d'une œuvre, et non de chemins entre accords à l'intérieur

¹⁷⁹ Ce résultat semble évident sémantiquement, mais il s'agit bien de distances mesurées en hyperspace après avoir modélisé le *graphe de Weitzmann* défini par Richard Cohn sous forme de sous-graphes-étoiles, et l'avoir plongé dans le modèle *Planet*.

¹⁸⁰ Les sommets sont de nature différentes : accords augmentés vs parfaits.

d'un même mouvement. Le modèle propose deux schémas de modulation à partir d'un accord majeur, et deux autres depuis un accord mineur. Les relations ne sont pas symétriques¹⁸¹. Nous construisons un graphe à 24 sommets :

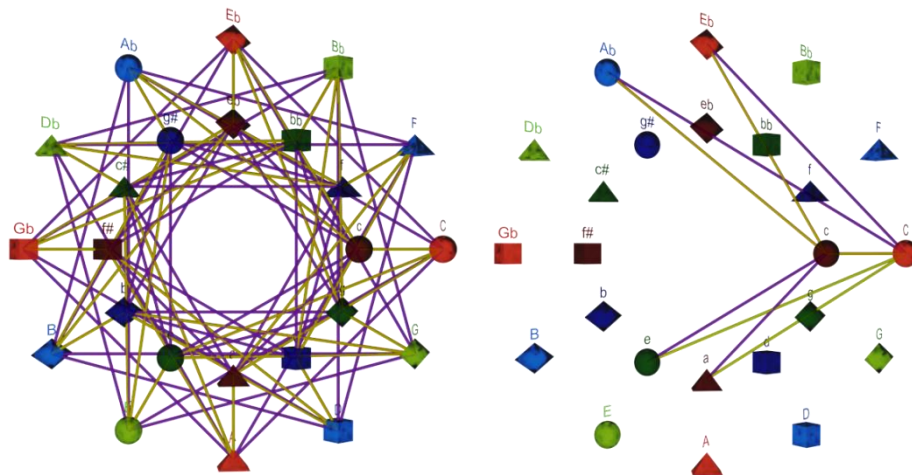


Figure 3-58 : Le graphe inspiré des modulations de Weitzmann

La figure 3-58 ci-dessus représente le graphe inspiré des modulations de Weitzmann ; à droite, seuls les voisins de *do* sont dessinés, nous remarquons graphiquement que le graphe n'est pas symétrique. Ce graphe est régulier, d'ordre 5, la matrice d'adjacence est représentée ci-dessous, figure 3-59.

Cette matrice n'étant pas symétrique, ses valeurs propres ne sont pas réelles :

$$\{5, -3.732i, 3.732i, 3 + 2i, 3 - 2i, -2 - 1.732i, 2 + 1.732i, 2 - 1.732i, -2 + 1.732i, -112, 1, -0.268i, 0.268i\}.$$

Le spectre du laplacien normalisé est :

$$(1.4 - 0.3464i, 1.4 + 0.3464i, 1 - 0.7464i, 1 + 0.7464i, 1.212, 1 - 0.0536i, 1 + 0.0536i, 0.8, 0.6 + 0.3464i, 0.6 - 0.3464i, 0.4 + 0.4i, 0.4, 0.4i, 0).$$

Chaque valeur propre est unique hormis 1.2, qui apparaît douze fois. Nous avons douze espaces triviaux et un espace à douze dimensions, une visualisation ne présente pas d'intérêt. Nous construirons un *graphe de graphes* à partir du schéma de Weitzmann pour obtenir des visualisations pertinentes au chapitre 3.4.7.

Le schéma de modulations de Weitzmann offre la possibilité d'un parcours eulérien, citons par exemple :

$$\{5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 0, 17, 10, 22, 5, 21, 0, 14, 7, 21, 14, 19, 12, 17, 22, 15, 2, 0, 3, 22, 1, 18, 2, 16, 7, 12, 5, 19, 10, 12, 8, 17, 5, 14, 2, 19, 3, 17, 1, 20, 13, 6, 22, 8, 20, 11, 23, 6, 20, 4, 23, 2, 21, 4, 18, 6, 15, 8, 13, 18, 23, 16, 21, 9, 13, 11, 15, 10, 14, 9, 18, 11, 1, 6, 9, 23, 7, 19, 0, 12, 3, 15, 1, 13, 4, 16, 0, 5\}.$$

¹⁸¹ Par exemple les voisins majeurs de *do* majeur sont *la^b* et *mi^b* majeurs, leur fondamentales sont distantes de *do* de -2 tons et +3/2 tons.

Le graphe est hamiltonien, en voici un cycle :

{0,5,10,3,8,1,6,11,4,9,2,7,12,17,22,15,20,13,18,23,16,21,14,19,0}.

		Majeurs												Mineurs											
		C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	B	c	c#	d	eb	e	f	f#	g	g#	a	bb	b
Majeurs	C	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	C#	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	D	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	Eb	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
	E	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
	F	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
	F#	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
	G	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
	G#	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	A	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	Bb	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
	B	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
Mineurs	c	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	c#	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	d	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	eb	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	e	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	f	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	f#	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
	g	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
	g#	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	a	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	bb	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	b	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Figure 3-59 : La matrice du graphe associé à l'espace des modulations de Weitzmann

3.4. ANALYSE DE RESEAUX DE GRAPHES

Comme les matrices d'adjacences associées aux espaces d'accords étudiés précédemment ne sont pas circulantes mais que seules certaines zones le sont, nous allons les rendre circulantes par blocs, c'est-à-dire transformer ces graphes afin d'obtenir des objets circulants à douze sommets et profiter des démonstrations précédentes afin de repérer instantanément les sous-espaces propres. Nous travaillerons avec des figures plus simples dont les sommets sont plus complexes.

Nous appelons *graphe de graphes* un graphe dont les nœuds sont des sous-graphes ayant tous le même ordre¹⁸².

¹⁸² Nous regroupons, par exemple dans un sous graphe, deux accords relatifs (C,a), ou homonymes (C,c). Le *graphe de graphes* correspondant aura douze sommets : les couples d'accords relatifs ou homonymes. Les graphes de graphes construits en regroupant les homonymes ou les relatifs sont circulants, nous préférons grouper les relatifs car ce sont des tons voisins au sens musical du terme.

3.4.1. Représentations du graphe de graphe

L'étude spectrale ne porte que sur la structure globale du graphe, mais lors de la représentation, nous dessinons pour chaque nœud les sous-graphes qui le composent.

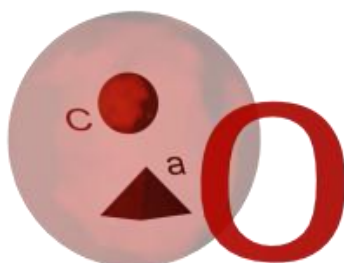


Figure 3-60 : Le symbole employé pour le nœud 0 dans un *graphe de graphes*

Nous utilisons toujours le système idéographique du modèle *Planet*, la forme et la couleur du symbole choisi sont celles de l'accord majeur contenu. Par exemple le nœud 0, est le sous-graphe contenant les accords C et a (voir ci-dessus figure 3-60).

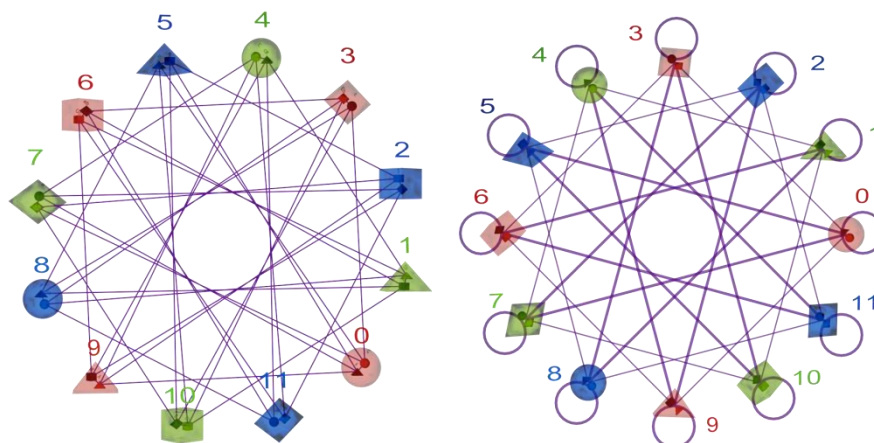


Figure 3-61 : Construction d'un *graphe de graphes*

La figure 3-61 ci-dessus illustre la relation entre le graphe original et le *graphe de graphes*. A gauche nous représentons les liaisons à l'intérieur des nœuds¹⁸³ ; à droite, la largeur du trait est proportionnelle à la pondération de la liaison concernée..

Le *graphe de graphes* comporte désormais des boucles qui représentent les liaisons à l'intérieur d'un même sous-graphe¹⁸⁴. L'exemple dessiné ci-dessus est le graphe de l'espace de Weber 1 que nous analysons à présent.

¹⁸³ Nous avons pivoté l'image de gauche et ajusté la position des accords dans chacun des symboles afin d'éviter une superposition graphique des arêtes.

¹⁸⁴ Nous avons vu au chapitre 2.5.2 que dans notre cas circulant, la présence de boucles ne change pas la multiplicité des valeurs propres.

3.4.2. Weber 1 : les parents directs, la carte de Schoenberg

Reprenons l'exemple du premier espace de Weber et organisons la matrice d'adjacence de la façon suivante :

Groupes		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		C a	Db bb	D b	Eb c	E c#	F d	F# D#	G e	Ab f	A f#	Bb g	B g#
0	C	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	a	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	Db	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
	bb	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
2	D	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	b	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
3	Eb	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
	c	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
4	E	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
	c#	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	F	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	d	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	F#	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	D#	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	G	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	e	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	Ab	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	f	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
9	A	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	f#	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
10	Bb	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	g	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
11	B	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
	g#	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Figure 3-62 : Réorganisation de la matrice du graphe Weber 1

Les 24 points du graphe original sont désormais groupés par couple d'accords relatifs triés chromatiquement. Le numéro attribué au groupe correspond à la fondamentale de l'accord majeur inclus. Nous voyons apparaître la structure circulante par blocs. Ainsi nous obtenons, pour le *graphe de graphes*, la matrice suivante où chaque coefficient est la somme des coefficients concernés dans le graphe original. Le résultat devient pondéré et circulant à 12 sommets, le nouveau graphe comporte des boucles. Les sous-espaces propres seront par conséquent constitués des seuls éléments décrits au chapitre 2.5.1.

Voici le graphe et sa matrice d'adjacence :

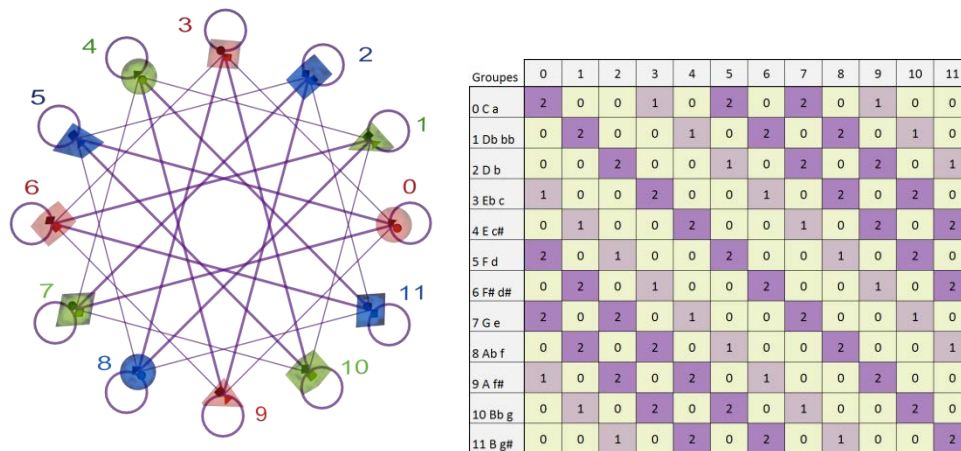


Figure 3-63 : Le graphe de graphes et sa matrice associée pour Weber 1

Le *graphe de graphes* associé au modèle de Weber est régulier, circulant et pondéré. Il présente deux valeurs possibles non nulles pour la pondération. Nous matérialisons la pondération de la liaison par la largeur du trait reliant les sommets. La valeur 2 est la plus forte, elle indique que les liaisons entre groupes distants d'une quarte (ou quinte) sont les plus fortes, ceci est à mettre en parallèle avec la notion musicale d'attraction de la quinte. Ici, il s'agit de groupe d'accords relatifs, Weber avait bien montré l'importance de ses relations.

La valeur de pondération 2 est utilisée aussi à l'intérieur d'un même groupe d'accords relatifs, ce qui se traduit par une boucle sur chaque nœud du graphe. Les autres liaisons dont la valeur de pondération est 1 indiquent qu'il n'y a qu'une seule relation entre deux relatifs de groupes différents : ici ce sont les relations entre homonymes.

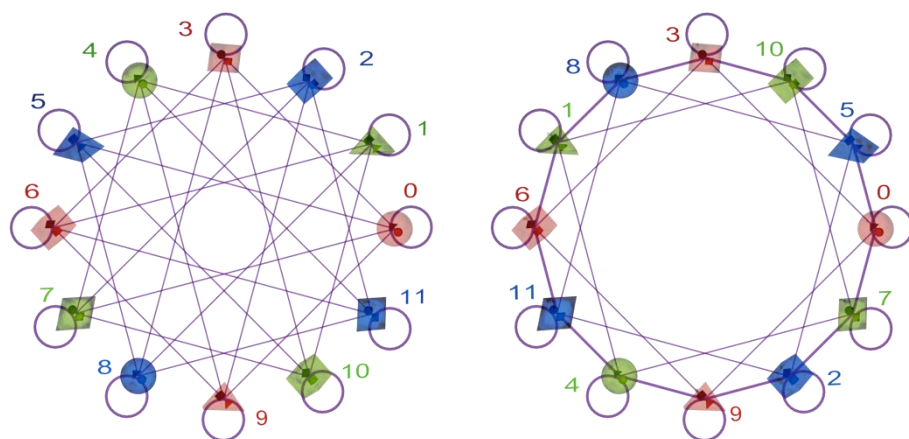
Nous ne détaillons pas les calculs de l'analyse, le spectre du laplacien normalisé est :

$$\{0.000, 1.183, 0.750, 0.750, 0.750, 0.317, 1.500, 0.317, 0.750, 0.750, 0.750, 1.183\}.$$

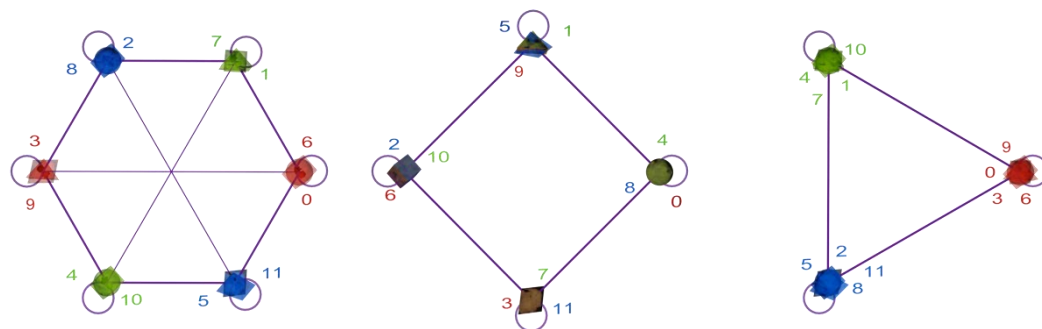
Nous utilisons directement les résultats du cas général à douze sommets (chapitre 2.5.1). Les valeurs propres sont classées par ordre d'apparition afin de relever facilement leur multiplicité et les différentes combinaisons. Nous construisons ainsi immédiatement les sous-espaces propres et les projections du graphe en combinant les formes géométriques associées à chaque valeur propre.

La projection dans le sous-espace E_0 , engendré par $\lambda_0 = 0$ est triviale, les points sont confondus.

La projection dans le sous-espace E_4 , engendré par $\lambda_6 = 3/2$ est triviale, les points sont séparés en deux groupes correspondant aux deux gammes par tons.

Figure 3-64 : Projections 2D du *graphe de graphes* Weber 1 dans E_1 et E_3

La projection dans le sous-espace E_1 engendré par $\lambda_1 = \lambda_{11} = 1.183$ fait apparaître tous les groupes comme les sommets d'un dodécagone arrangés chromatiquement. La projection dans le sous-espace E_3 engendré par $\lambda_5 = \lambda_7 = 0.317$ fait apparaître tous les groupes comme les sommets d'un dodécagone arrangés selon le cycle des quartes. Voir ci-dessus figure 3-64: à gauche, la projection dans E_1 ; à droite, la projection dans E_3 .

Figure 3-65 : Projection 6D du *graphe de graphes* Weber 1 dans E_2

La projection dans le sous-espace à six dimensions E_2 engendré par $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 3/4$ est représentée ci-dessus, figure 3-65. L'image 6D est séparée en trois vues 2D orthogonales. Nous retrouvons les formes géométriques décrites au chapitre 2.5.1.

3.4.3. Weber 2 : les parents proches

Nous appliquons la même méthode que précédemment pour les parents proches dans l'espace de Weber, décrits au chapitre 3.3.1. Voici le *graphe de graphes* et sa matrice d'adjacence :

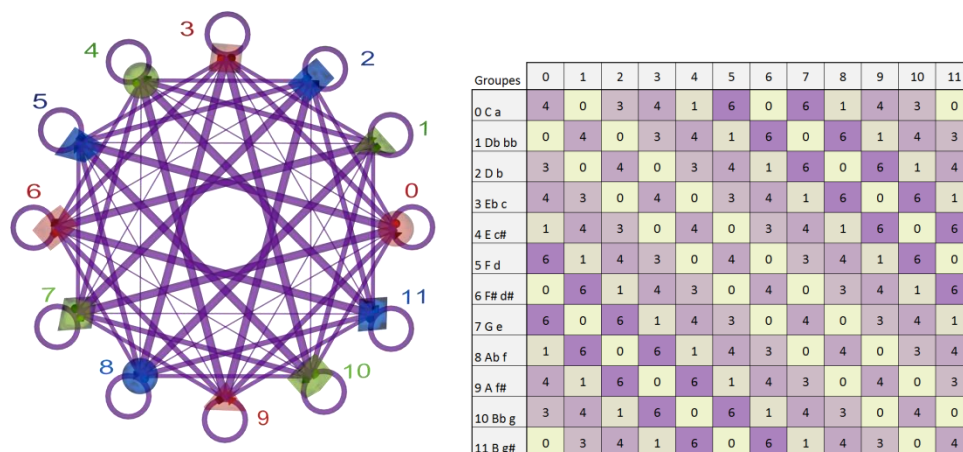


Figure 3-66 : Le graphe de graphes et sa matrice associée pour Weber 2

Le *graphe de graphes* associé au modèle de Weber2 est régulier, circulant et pondéré. Il présente quatre valeurs possibles non nulles pour la pondération. La quinte est toujours la liaison la plus importante.

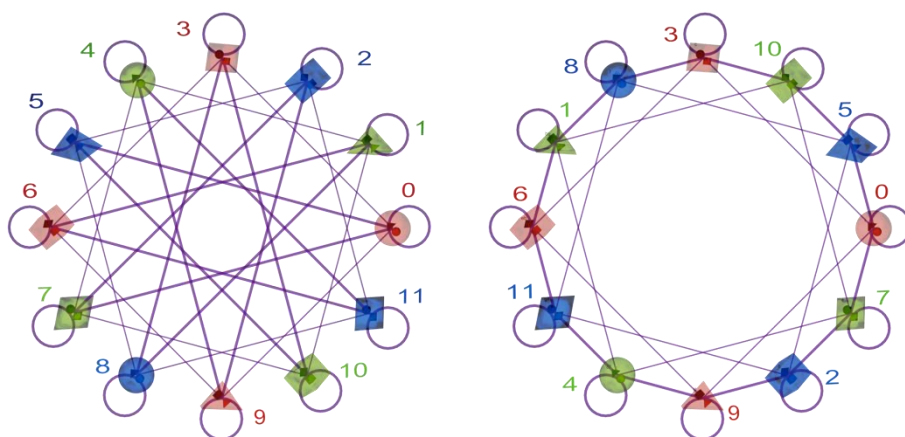
Nous ne détaillons pas les calculs de l'analyse, le spectre du laplacien normalisé est :

$$\{0.000, 1.137, 1.063, 1.000, 0.938, 0.488, 1.250, 0.488, 0.938, 1.000, 1.063, 1.137\}.$$

La projection dans le sous-espace E_0 , engendré par $\lambda_0 = 0$, est triviale, les points sont confondus.

La projection dans le sous-espace E_6 , engendré par $\lambda_6 = 5/4$ est triviale, les points sont séparés en deux groupes correspondant aux deux gammes part tons.

Tous les autres sous-espaces propres sont bidimensionnels, les projections font apparaître les figures géométriques détaillées au chapitre 2.5.1.

Figure 3-67 : Projections 2D du graphe de graphes Weber 2 dans E_1 et E_5

Dans la figure 3-67 ci-dessus, nous retrouvons à gauche la répartition selon le cercle chromatique correspondant à la projection du graphe dans

E_1 , engendré par $\lambda_1 = 1.137$; à droite, la répartition par quarts correspondant à la projection du graphe dans E_5 , engendré par $\lambda_5 = 0.488$.

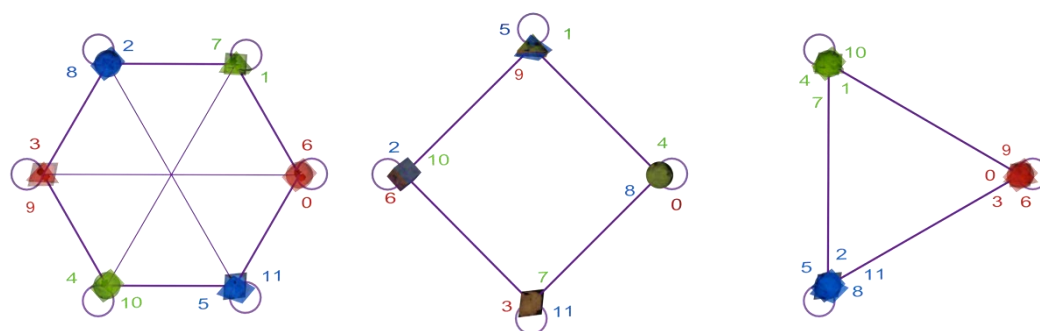


Figure 3-68 : Projections 2D du *graphe de graphes* Weber 2 dans E_2 , E_3 et E_4

Les autres projections ne séparent pas les douze sommets, nous retrouvons les figures habituelles. Voir ci-dessus, figure 3-68 : à gauche la projection dans E_2 , engendré par $\lambda_2 = 1.063$; au centre la projection dans E_3 , engendré par $\lambda_3 = 1$; à droite la projection dans E_4 , engendré par $\lambda_4 = 0.938$ ¹⁸⁵.

Les sous-espaces propres associés à l'espace des parents proches de Weber sont ceux du graphe C_{12} .

3.4.4. Weber 3 : les parents éloignés

Nous appliquons de nouveau la même méthode précédente pour les parents éloignés dans l'espace de Weber présentés au chapitre 3.3.4. Voici le *graphe de graphes* et sa matrice d'adjacence :

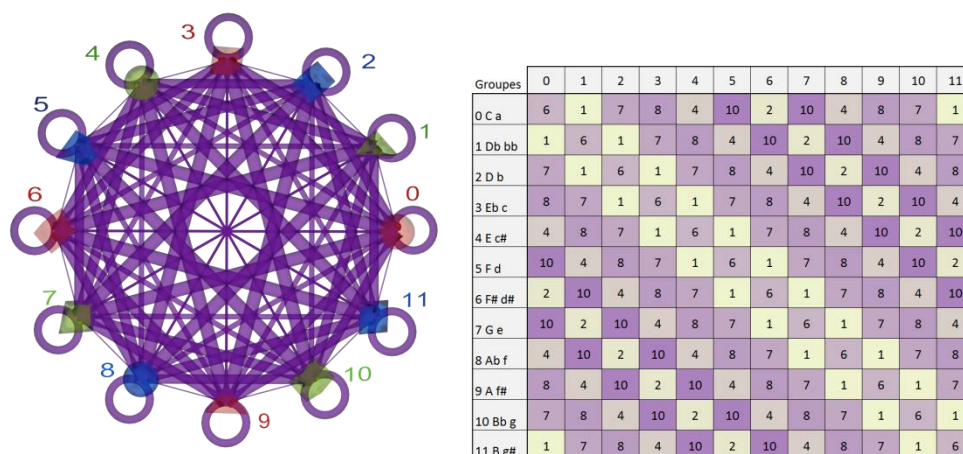


Figure 3-69 : Le *graphe de graphes* et sa matrice associée pour Weber 3

¹⁸⁵ Ces trois sous-espaces sont bien distincts, l'image n'est pas une décomposition d'une projection à six dimensions.

Le *graphe de graphes* associé au modèle de Weber 3 est le graphe complet pondéré. Il est circulant. Il présente six valeurs possibles non nulles pour la pondération. La quinte est la liaison la plus forte, la seconde mineure la plus faible.

Sans détailler les calculs, le spectre du laplacien normalisé est :

$$\{0.000, 1.126, 1.118, 1.029, 0.971, 0.668, 1.118, 0.668, 0.971, 1.029, 1.118, 1.126\}$$

La projection dans le sous-espace E_0 , engendré par $\lambda_0 = 0$, est triviale, les points sont confondus.

Nous construisons ainsi immédiatement les sous-espaces propres et les projections du graphe en combinant les formes géométriques associées à chaque valeur propre.

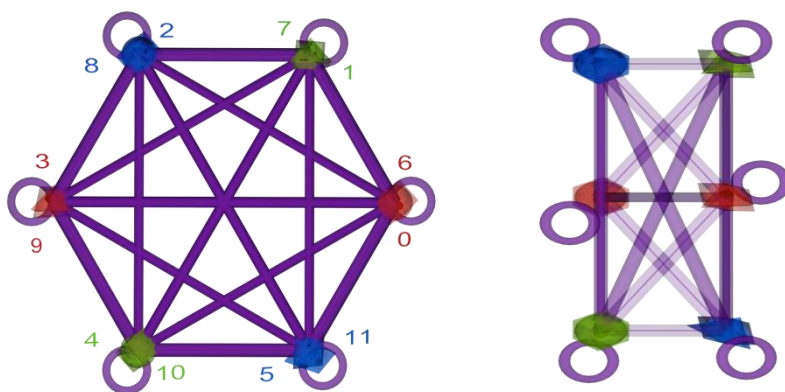
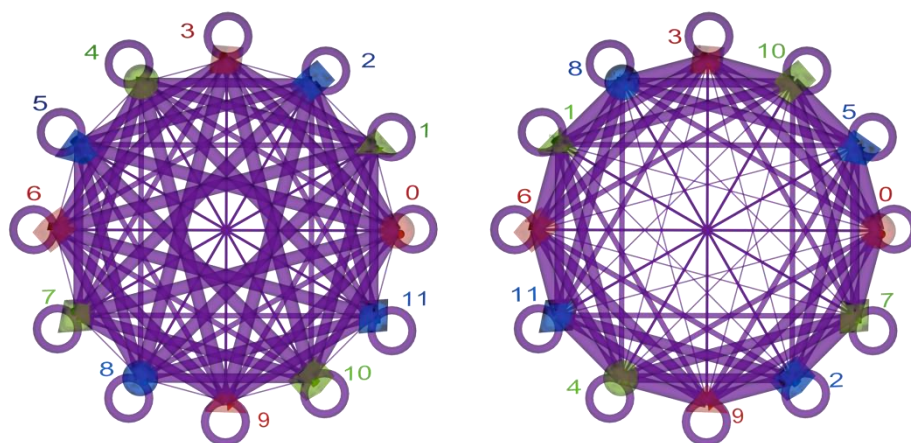
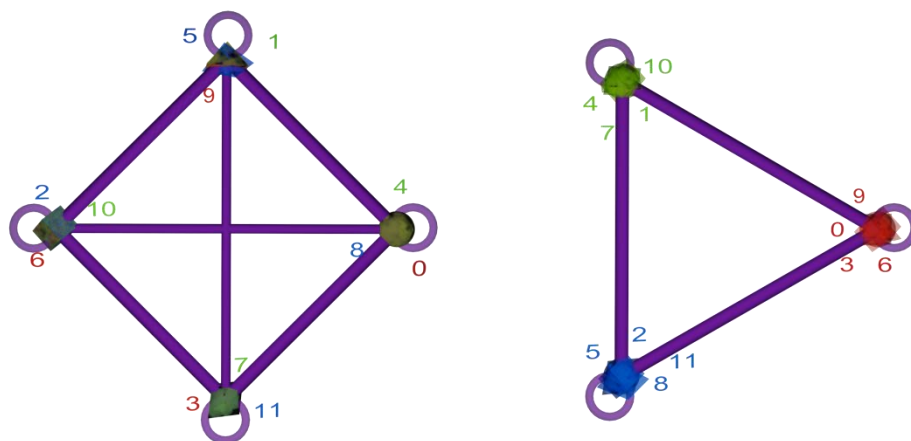


Figure 3-70 : Projection 3D du *graphe de graphes* Weber 3 dans E_2

Nous obtenons un sous-espace propre à trois dimensions : E_2 associé à la valeur propre $\lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_{10} = 1.118$. Avec cette projection les tritons sont confondus, la figure 3-70 ci-dessus montre, à gauche, une vue de face et, à droite, une vue de côté de la projection 3D. La valeur propre λ_6 associée au triton engendre la troisième dimension, mais n'apporte pas d'information supplémentaire dans le cas présent (voir chapitre 2.5.3).

Figure 3-71 : Projections 2D du *graphe de graphes* Weber 3 dans E_1 et E_5

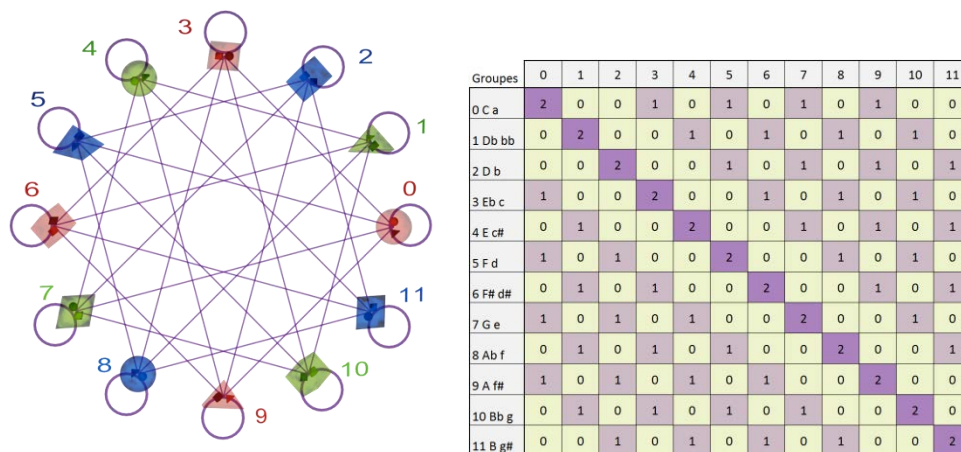
La projection dans le sous-espace E_1 , engendré par $\lambda_1 = \lambda_{11} = 1.126$, fait apparaître tous les groupes comme les sommets d'un dodécagone arrangés chromatiquement. La projection dans le sous-espace E_5 engendré par $\lambda_5 = \lambda_7 = 0.971$ fait apparaître tous les groupes comme les sommets d'un dodécagone arrangés selon le cycle des quartes. Voir ci-dessus figure 3-71 : à gauche, la projection dans E_1 ; à droite, la projection dans E_5 .

Figure 3-72 : Projections 2D du *graphe de graphes* Weber 3 dans E_3 et E_4

Les autres projections ne séparent pas les douze sommets, nous retrouvons les figures habituelles. Voir ci-dessus, figure 3-72 : à gauche la projection dans E_3 , engendré par $\lambda_3 = 1.029$; à droite la projection dans E_4 , engendré par $\lambda_4 = 0.971$.

3.4.5. Douthett et Steinbach : le *Chicken Wire*

Nous appliquons la même méthode que précédemment pour le *Chicken Wire* détaillé au chapitre 3.3.5. Voici le *graphe de graphes* et sa matrice d'adjacence :

Figure 3-73 : Le graphe de graphes et la matrice associée au *Chicken Wire*

Le *graphe de graphes* associé au modèle *Chicken Wire* est régulier, circulant et pondéré. Il présente deux valeurs possibles non nulles pour la pondération. La valeur 2 est la plus forte, elle s'applique aux liaisons à l'intérieur d'un même groupe, c'est-à-dire entre deux accords relatifs. On trouve la valeur de pondération 1 pour la tierce mineure et la quarte.

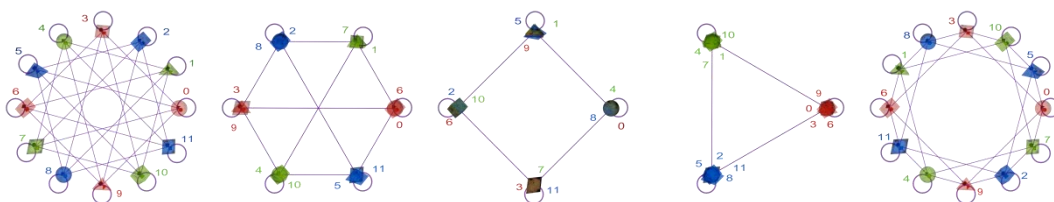
Nous ne détaillons pas les calculs de l'analyse, le spectre du laplacien normalisé est :

$$\{0.000, 0.955, 0.833, 0.667, 0.500, 0.378, 1.333, 0.378, 0.500, 0.667, 0.833, 0.955\}.$$

Comme pour le graphe C_{12} , chaque couple de valeur propre est unique, il n'y a donc pas de sous-espace propre à plus de deux dimensions.

La projection dans le sous-espace E_0 , engendré par $\lambda_0 = 0$, est triviale, les points sont confondus.

La projection dans le sous-espace E_6 , engendré par $\lambda_6 = 4/3$, est triviale, les points sont séparés en deux groupes correspondant aux deux gammes par tons.

Figure 3-74 : Projections 2D du *graphe de graphes* du *Chicken Wire* dans E_1 , E_2 , E_3 , E_4 et E_5

La figure 3-74 ci-dessus montre, de gauche à droite, les projections dans les sous-espaces propres (E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5) associés respectivement aux valeurs propres ($\lambda_1 = \lambda_{11} = 0.955$; $\lambda_2 = \lambda_{10} = 0.833$; $\lambda_3 = \lambda_9 = 0.667$; $\lambda_4 = \lambda_8 = 0.5$, $\lambda_5 = \lambda_7 = 0.378$).

3.4.6. Weitzmann : les schémas de modulation

Nous appliquons de nouveau la même méthode précédente aux schémas de modulation de Weitzmann présentés au chapitre 3.3.6.3. Voici le *graphe de graphes* et sa matrice d'adjacence :

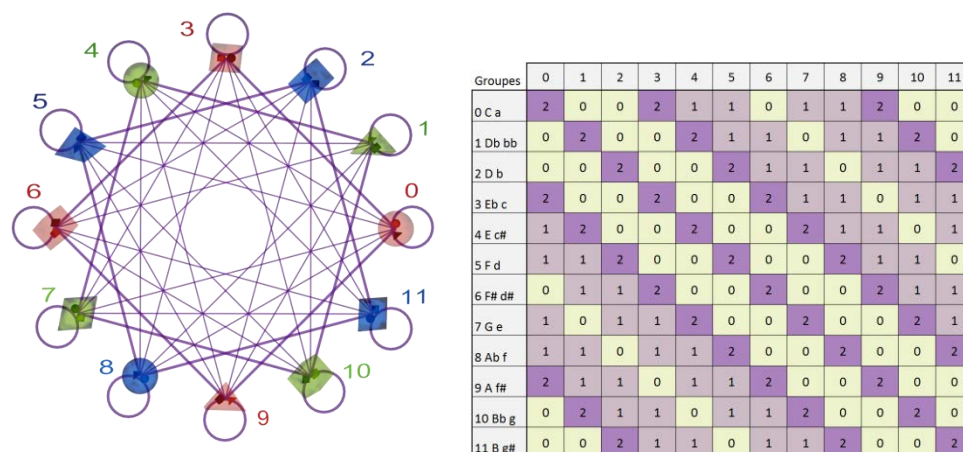


Figure 3-75 : Le *graphe de graphes* et la matrice associée aux modulations de Weitzmann

Le *graphe de graphes* associé au schéma des modulations de Weitzmann est régulier, circulant et pondéré. Il présente deux valeurs possibles non nulles pour la pondération. La valeur 2 est employée pour les boucles et la liaison vers la tierce mineure. En utilisant le concept de *graphe de graphes*, le spectre est réel et nous pouvons utiliser facilement les projections spectrales du graphe.

Nous ne détaillons pas les calculs de l'analyse, le spectre du laplacien normalisé est :

$$\{0.000, 1.073, 1.200, 0.600, 0.600, 0.727, 1.200, 0.727, 0.600, 0.600, 1.200, 1.073\}.$$

La projection dans le sous-espace E_0 , engendré par $\lambda_0 = 0$, est triviale, les points sont confondus.

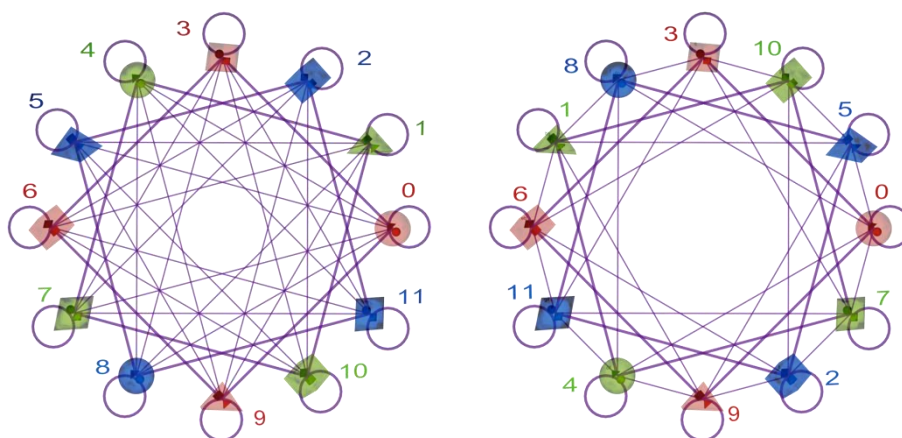


Figure 3-76 : Projections 2D du *graphe de graphes* des modulations de Weitzmann dans E_1 et E_4

Dans la figure 3-76 ci-dessus, nous retrouvons, à gauche, la répartition selon le cercle chromatique correspondant à la projection du graphe dans E_1 engendré par $\lambda_1 = 1.073$, à droite, la répartition par quarts correspondant à la projection du graphe dans E_4 engendré par $\lambda_5 = 0.727$.

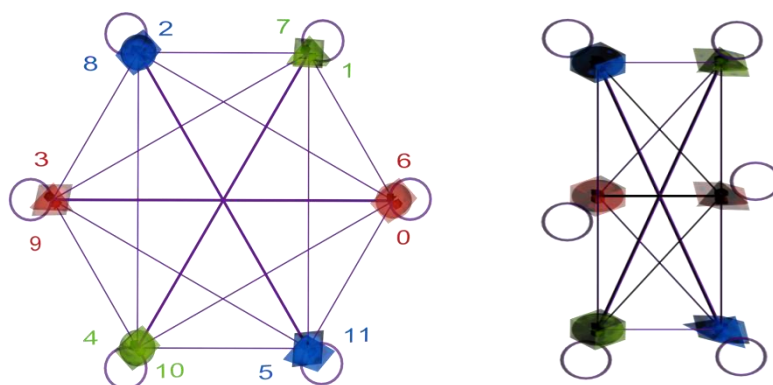


Figure 3-77 : Projection 3D du *graphe de graphes* des modulations de Weitzmann dans E_2

Le sous-espace propre E_2 , engendré par $\lambda_2 = \lambda_6 = \lambda_{10} = 1.2$ est tridimensionnel, sa projection montre en vue de face un hexagone, en vue de droite un rectangle (voir ci-dessus figure 3-77).

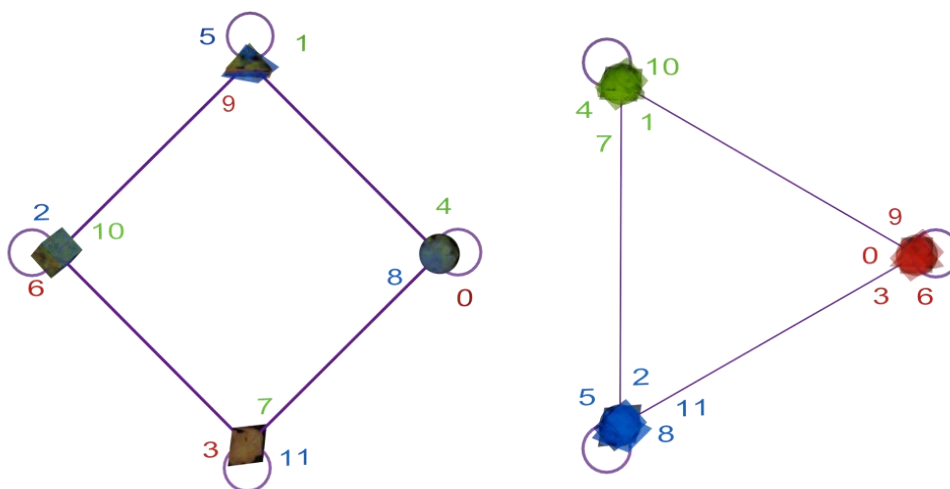


Figure 3-78 : Projection 4D du *graphe de graphes* des modulations de Weitzmann dans E_3

L'espace E_3 , engendré par $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 0.6$, est à quatre dimensions. C'est l'espace utilisé pour le modèle *Planet*. La figure 3-78 ci-dessus illustre la projection 4D en deux vues par scindement de l'espace.

Conclusion

Le *graphe de graphes* du schéma de modulations de Weitzmann contient l'espace du modèle *Planet* de façon native.

3.4.7. Graphes de graphes par types d'accords

Nous utilisons le concept précédent de *graphe de graphes* afin de représenter les relations entre types d'accords. Les nœuds du *graphe de graphes* sont désormais des ensembles d'accords de même type. Nous regroupons, par exemple dans un sous-graphe, tous les accords de même type (majeurs ou mineurs). Les arêtes du graphe sont les liaisons entre les différentes familles d'accords. Comme nous pouvons rencontrer le cas où les relations de majeur vers mineur ne sont pas les mêmes que celles de mineur vers majeur, nous choisissons un graphe orienté. S'agissant de structures très simples, une analyse spectrale n'est pas nécessaire.

Les modèles représentés sont ceux étudiés précédemment :

- Weber 1 : les parents directs,
- Weber 2 : les parents proches,
- Weber 3 : les parents éloignés,
- Douthett et Steinbach : le *Chicken Wire* ,
- Weitzmann : Les schémas de modulation.

Dans la première colonne du tableau 3-8 suivant, nous représentons le graphe : nous séparons graphiquement l'ensemble des accords majeurs de celui des accords mineurs. Avec la représentation traditionnelle, nous utilisons toujours le système de coloration *Planet* pour les symboles des accords, le groupe contenant les accords majeurs sera de couleur claire, celui contenant les mineurs de couleur sombre¹⁸⁶. Les relations au sein d'un groupe ne sont pas visibles aisément. Il n'y a pas de relations entre accords de même type autre que la quarte. Cette représentation n'est donc pas très informative si ce n'est pour comparer la densité de graphes.

Dans la seconde colonne du tableau 3-8 suivant, nous représentons le *graphe de graphes* par type d'accords.

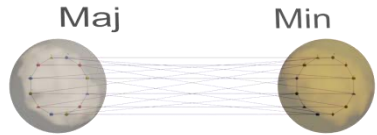
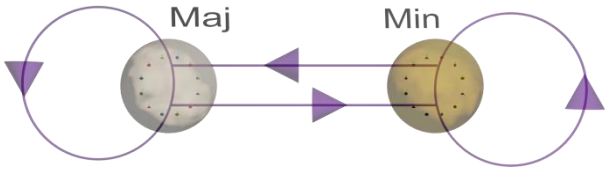

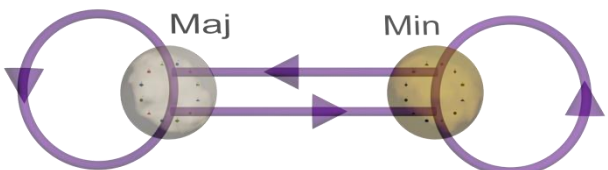

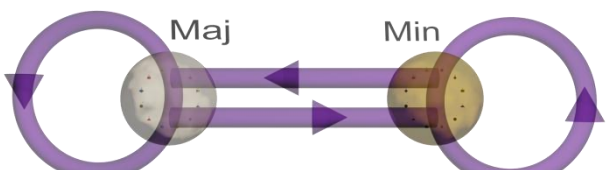
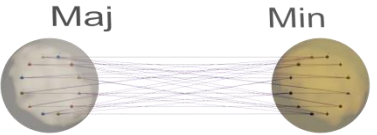
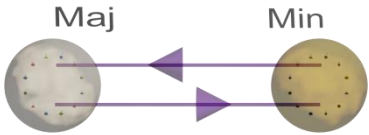
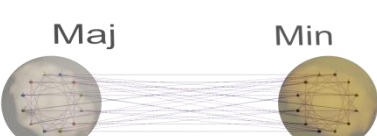
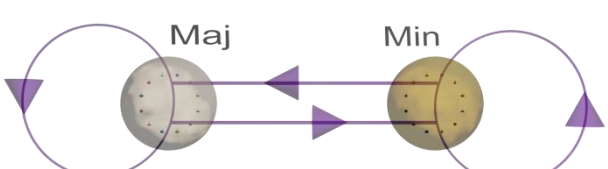
La représentation par *graphe de graphes* facilite quelques comparaisons :

- Au sein d'un même graphe s'il y a symétrie entre les groupes majeurs et mineurs , c'est toujours le cas avec ces quatre exemples, la possibilité de voir une dissymétrie ayant été prévue à la conception.
- Au sein d'un même graphe si les relations sont plus importantes à l'intérieur d'un groupe d'accords ou vers le second groupe.

Nous distinguons aussi, en comparant les cinq graphes, ceux qui donnent plus d'importance aux relations à l'intérieur de chaque groupe, ou d'un groupe vers l'autre.

¹⁸⁶ Nous avons volontairement organisé les accords par quarts au sein d'un même groupe. Ces relations étant généralement prépondérantes dans les réseaux d'accords, nous les visualisons comme un dodécagone. Les autres relations entre accords du même type sont ainsi plus rapidement visibles.

Tableau 3-8 : *Graphes de graphes* par types d'accords

	Graphe	Graphe de graphes
Weber 1		
Weber 2		
Weber 3		
<i>Chicken Wire</i>		
Weitzmann		

Conclusion

Ce type de représentation nous montre clairement que

- concernant le graphe du *Tonnetz*, il n'y a pas de liaison entre deux accords de même type ,
- en suivant la progression des modèles de Weber, la forme ne varie pas visuellement, le graphe devient plus lourd car le nombre de voisins augmente.

3.5. ANALYSE MUSICALE ET HYPERSPHERES

Dans ce chapitre, nous utilisons les visualisations pour montrer les chemins harmoniques internes à des œuvres connues de tous afin que chacun puisse en saisir la logique. L'enseignant peut aussi les utiliser comme support visuel en les commentant¹⁸⁷.

Les exemples décrits dans ce chapitre sont classés par complexité croissante. Depuis les chemins harmoniques simples contenus dans le *Blues* jusqu'à certains exemples représentatifs de la musique atonale, nous ferons évoluer la complexité de la représentation visuelle.

La littérature contient de nombreux exemples d'analyse musicale utilisant le *Tonnetz* et la théorie transformationnelle de David Lewin¹⁸⁸. Les modèles hypersphériques présentés dans ce mémoire sont des visualisations de l'espace des hauteurs et n'entendent pas remplacer les analyses musicales traditionnelles ou à l'aide de la *Set Theory*.

L'ordre proposé suit la complexité des représentations :

Espace circulaire et *Planet-4D*

- *Chicago Blues* : introduction au concept d'espace tournant et de spectateur fixe.
- *Giant Steps* : mise en mouvement de modèle *Planet-4D* de façon élémentaire autour de trois positions symétriques.

Hypersphère des Accords parfaits

- Beethoven : présentation de l'*Hypersphère des Accords parfaits* inspirée du *Tonnetz* avec l'exemple mathémusical le plus connu.
- Albini : chemin simple et complet à travers tous les accords en se déplaçant de voisin à voisin.
- Brahms : les déplacements ne sont plus forcément proches et suivent des chemins harmoniques classiques.

Hypersphère Généralisée avec accords parfaits

- Purcell : des accords tonals et non parfaits sont représentés à la surface de l'hypersphère.
- Chopin : les accords sont à quatre sons, notre modèle est mis en parallèle avec la représentation circulaire de Dmitri Tymoczko.

Hypersphère Généralisée AnySet en mode Tonal

- Beethoven : reprise de l'exemple précédent avec la nouvelle représentation.

¹⁸⁷ Voir Annexe 2, pour le contenu du support multimédia fourni.

¹⁸⁸ Voir par exemple (Lewin, 1987), (Chouvel, 2005) et (Andreatta, 2003).

- Albini : reprise de l'exemple précédent avec la nouvelle représentation.
- Chopin : reprise de l'exemple précédent avec la nouvelle représentation.

Hypersphère Généralisée AnySet en mode Atonal

- Stravinsky : musique atonale comportant des suites à deux ou quatre notes symétriques et ensembles.
- Schoenberg : accords à deux ou quatre sons qui parfois se forment par retrait d'une note, la sphère tourne si une note disparaît.
- Webern : des accords à 1,2,3,4,5 sons, construits aussi par retrait et avec des timbres riches.

3.5.1. *Chicago Blues* : trois accords sur un cercle

C'est l'exemple étudié le plus élémentaire au niveau harmonique, il est par ailleurs très pauvre au niveau des enchaînements d'accords. La pauvreté harmonique de la suite d'accords n'implique pas une médiocrité en ce qui concerne les autres aspects de la musique utilisant ce schéma¹⁸⁹.

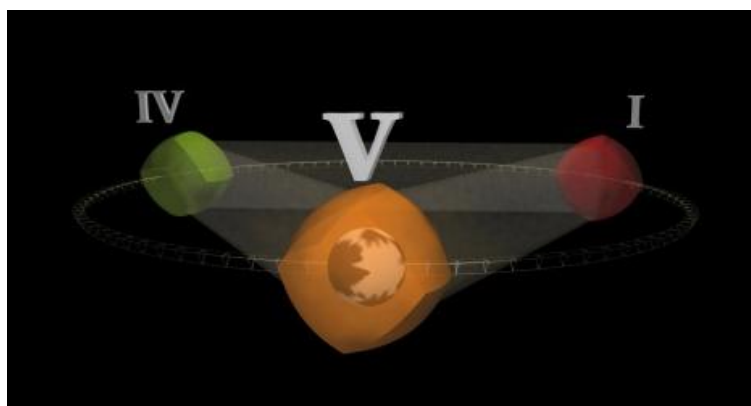


Figure 3-79 : L'espace circulaire du Blues

Cette animation est l'une des premières que je présente lors de conférences grand public, car elle permet d'introduire le concept d'univers tournant et de position de lecture fixe symbolisée par la petite sphère centrale. Les trois accords utilisés s'appellent *tonique*, *sous-dominante* et *dominante*. Ils se notent aussi I, IV et V car ils correspondent aux 1^{er}, 4^{ème} et 5^{ème} degrés en harmonie tonale. La bande son est extraite de la chanson "Sweet Home Chicago", écrite par Robert Johnson en 1936 et jouée par le groupe "The Blues Brothers" dans le film éponyme de John Landis de 1980¹⁹⁰.

¹⁸⁹ Ce type de parcours harmonique est universel, on le retrouve entre autres dans le Rock, et la musique Pop. *L'ode à la joie* de Beethoven utilise ces trois accords.

¹⁹⁰ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 1, *Sweet Home Chicago*, p. 307.

L'animation¹⁹¹ présente la grille telle que la connaît chaque musicien de Jazz, puis les tonalités de chaque séquence en tant que symboles colorés (voir ci-dessus figure 3-80). Le modèle *Planet-4D* est ensuite introduit, les accords non utilisés sont grisés afin de montrer la structure triangulaire tournante au grès de la musique.

Bien que *Giant Steps* soit un morceau complexe, et que l'interprétation et les improvisations associées soient difficiles à jouer, la vidéo montre bien la simplicité du système des modulations à la tierce. La symétrie des positions des trois centres de tonalités révèle la structure de cette composition.

3.5.3. Beethoven et l'*Hypersphère* : l'exemple mathématique de référence

La progression des accords utilisés par Beethoven dans le second mouvement de la neuvième symphonie aux mesures 143-176 est un exemple cité abondamment pour la pédagogie des *Tonnetz*. Cette suite décrit un chemin remarquable sur le *Tore des tierces*, chemin passant par presque tous les accords sans répétition¹⁹². Ceci fut remarqué par Richard Cohn (Cohn, 1992).

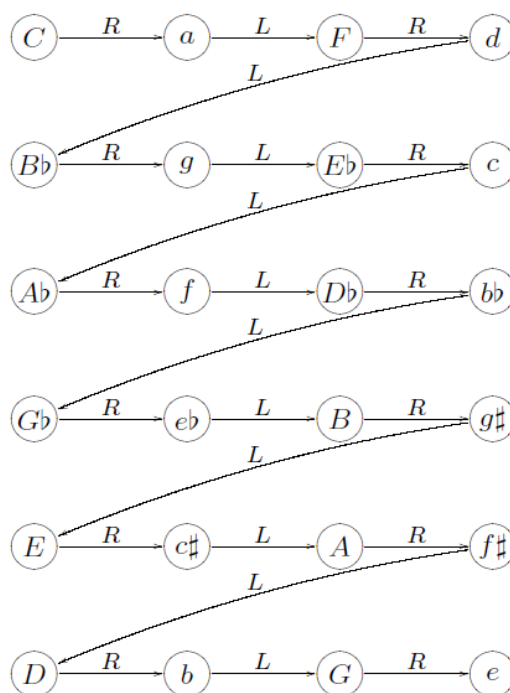


Figure 3-81 : La progression d'accords remarquable, dans la 9^{ème}

L'image ci-dessus (figure 3-81) est extraite d'une présentation de Thomas Fiore réalisée à l'Université du Michigan en 2004 : "Beethoven and the Torus", reproduite avec l'aimable autorisation de l'auteur.

¹⁹¹ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 2, Coltrane's Steps, p. 307.

¹⁹² Le titre international est "Beethoven and the Hypersphere", c'est un clin d'œil au cours de mathémusique dispensé par Thomas Fiore (Fiore, 2004) intitulé "Beethoven and the torus".

Etant donné que le modèle géométrique de l'*Hypersphère des Accords* est équivalent à l'espace topologique dual du *Tonnetz* (voir l'étude du *Chicken Wire* au chapitre 3.3.5, p. 190), nous pouvons réutiliser les mêmes exemples musicaux, en les illustrant cette fois en quatre dimensions.

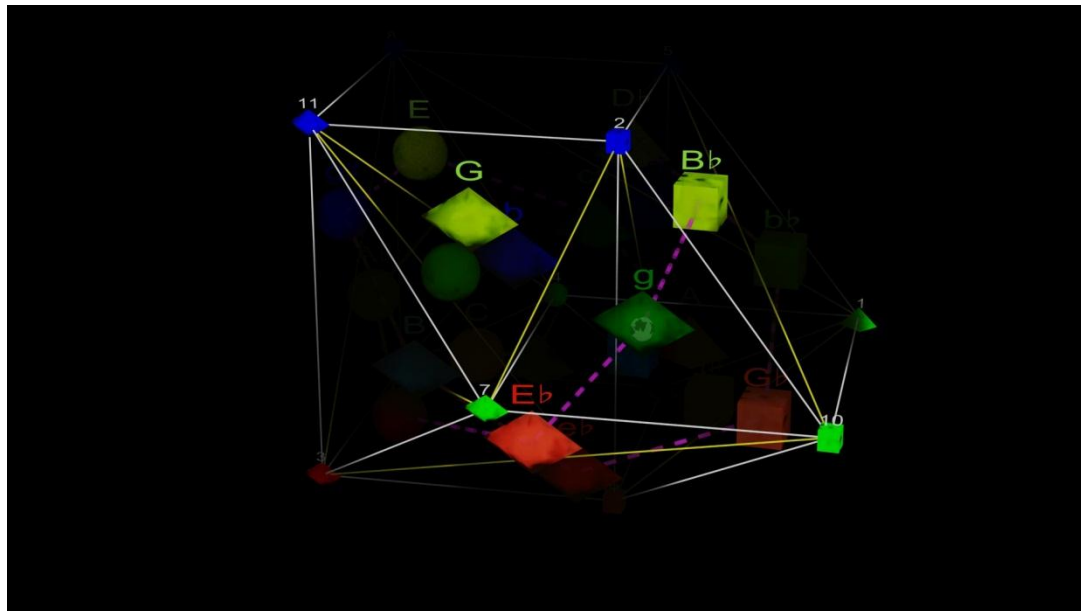


Figure 3-82 : Un extrait de *Beethoven et l'Hypersphère*

Lors de la production, la grille a été quantifiée afin d'écrire le scénario de l'animation¹⁹³. La sphère utilisée est la première *Hypersphère des Accords*, version *Tonnetz*. Les symboles des accords sont aux centres des faces de la projection 3D (voir chapitre 2.6.3). Elle permet à l'auditeur familier des représentations planes ou toriques de se repérer plus facilement en quatre dimensions. La figure 3-82 ci-dessus est extraite de l'animation, l'accord présenté est *sol mineur*, la ligne pointillée violette montre le chemin harmonique.

Cette suite d'accords n'est pas typique de la musique de Beethoven, c'est un passage remarquable anecdotique connu des mathémusiciens. L'animation n'apporte pas de nouveauté concernant l'analyse musicologique de cet extrait mais permet une vision plus spectaculaire que le dessin traditionnel. Elle montre de façon plus symétrique qu'avec un tore les passages d'accords, et surtout permet de valider la construction du modèle.

Une autre animation, avec l'*Hypersphère Généralisée AnySet*, est proposée plus bas (chapitre 3.5.8).

¹⁹³ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 2, Coltrane's Steps, p. 307.

3.5.4. Albini : le cycle hamiltonien en musique

Il existe des cycles hamiltoniens dans l'espace dual du *Tonnetz* (Albini & Antonini, 2009). Le mathémusicien Giovanni Albini a mis en pratique ses connaissances théoriques mathématiques et son expérience musicale pour réaliser la *corale #4 per cello e archi*. Nous avons travaillé ensemble pour la réalisation de l'animation vidéo "Hamiltonian Path on the Hypersphere", qui fut une de mes premières illustrations de l'*Hypersphère des Accords*. La musique laisse entendre les accords de façon très claire et les changements sont lents.

Les retours d'expérience indiquent que, grâce à l'*Hypersphère des Accords*, alternative 4D du tore, le chemin est suivi facilement aussi bien par un non-musicien qui ressentira la synchronisation des mouvements et percevra les changements d'accords que par un non mathématicien qui remarquera la symétrie de la sphère et de ses mouvements. Les mathémusiciens remarqueront la nouveauté de la représentation.

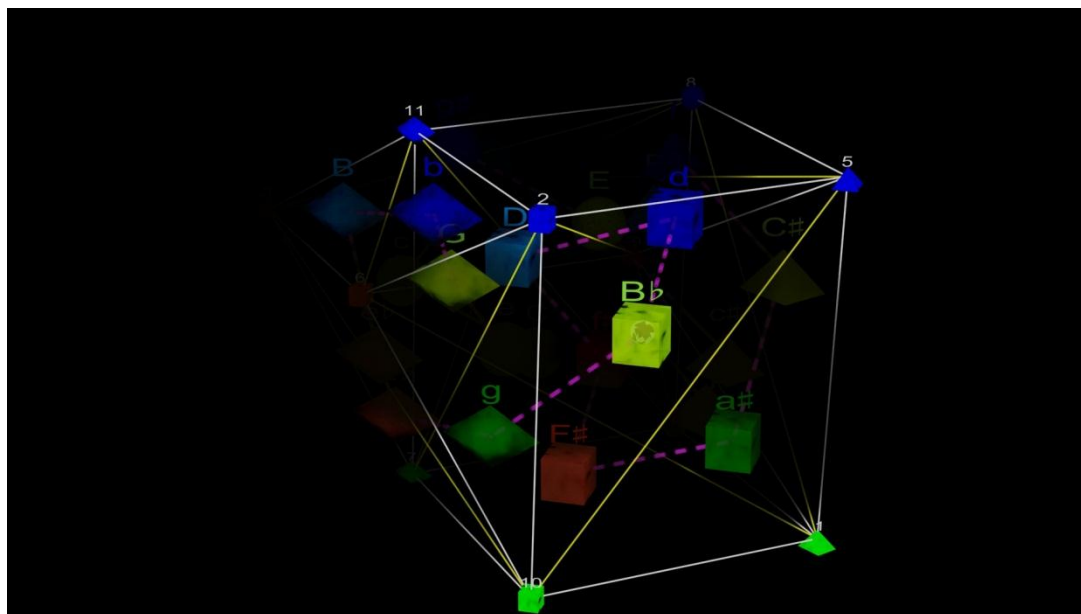


Figure 3-83 : Un chemin hamiltonien sur l'*Hypersphère des Accords*

La figure 3-83 ci-dessus est extraite de l'animation¹⁹⁴, l'accord présenté est *si^b majeur*, la ligne pointillée violette montre le chemin hamiltonien suivi. La pièce musicale étant interprétée par un orchestre réel (humain), le tempo est variable. Il fut nécessaire de synchroniser graphiquement les changements d'accords à la bande son de manière précise. Avec l'*Hypersphère des Accords*, dans sa version *Tonnetz*, le spectateur plus ou moins habitué se familiarise avec la quatrième dimension et le principe de sphère en rotation autour du point focal fixe. Avec cet exemple, les concepts de chemin hamiltonien et de transformations néo-riemanniennes sont exposés graphiquement, de façon simple, afin de les rendre accessibles aux non spécialistes.

¹⁹⁴ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 2, Coltrane's Steps, p. 307.

Une autre animation, avec l'*Hypersphère Généralisée AnySet*, est proposée plus bas (chapitre 3.5.8).

3.5.5. Brahms : passages typiques d'accords classiques

En utilisant la même sphère, nous proposons une visualisation¹⁹⁵ d'un extrait d'une symphonie de Johannes Brahms (1833-1897)¹⁹⁶.

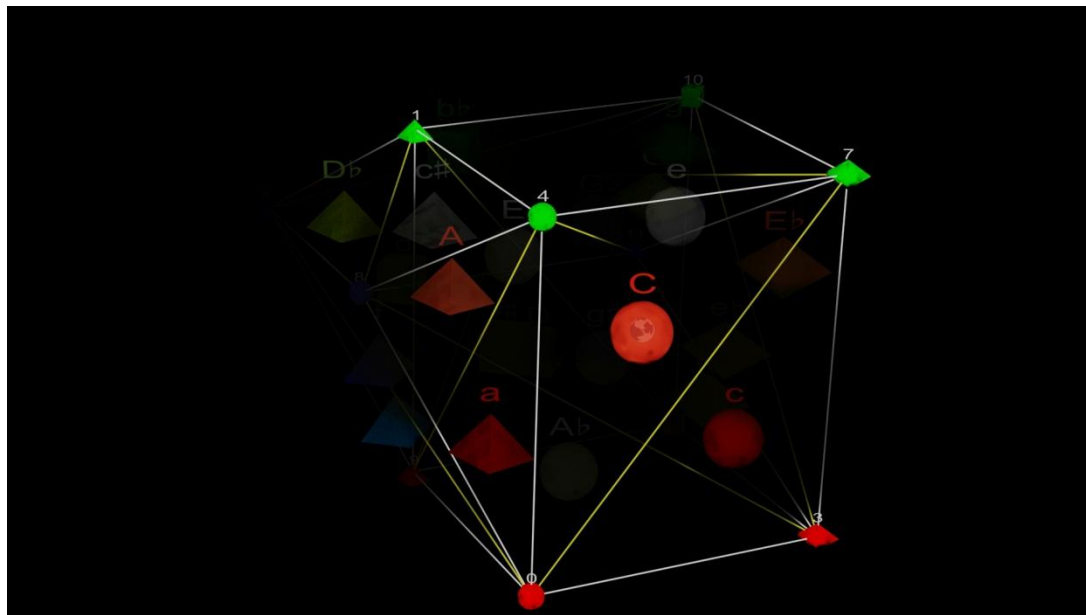


Figure 3-84 : Une utilisation de l'*Hypersphère* avec Brahms

Les accords sont tous analysés comme parfaits et nous conservons la première construction de l'*Hypersphère des Accords*. Les accords qui ne sont pas présents dans l'extrait concerné ont été grisés afin d'améliorer la lisibilité. Dans la figure 3-84 ci-dessus, l'accord présenté est *do mineur*¹⁹⁷. Dans cet extrait, nous voyons des enchaînements d'accords classiques dans un cadre tonal. Ils peuvent être éloignés¹⁹⁸ sur la sphère, mais proches, harmoniquement.

¹⁹⁵ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 5, Baby Alone in Hyperspace, p. 307.

¹⁹⁶ Il s'agit d'un arrangement de Serge Gainsbourg (1928-1991) interprété par Jane Birkin (Mercury Records B000007WW4). Le choix de l'arrangement et de l'interprète sont purement personnels. La progression harmonique est identique à celle de la symphonie.

¹⁹⁷ Les accords de *mi mineur* et *do# mineur* (e et c#) qui ne sont pas utilisés dans cette pièce sont grisés ; par contre, *do mineur* et *a majeur* (c et a), qui interviennent dans ce passage, conservent leur couleur.

¹⁹⁸ Éloignés par opposition aux exemples précédents de Beethoven et Albini qui n'utilisaient que des relations P,L,R.

Grands et petits déplacements

Le morceau commence par des va-et-vient entre les accords F- et E^b, qui sont les plus éloignés sur l'hypersphère¹⁹⁹. Nous observons les rotations combinées et chacun distingue les changements d'accords grâce au jeu du guitariste qui alterne arpèges et battements.

A la seconde 20, nous avons un passage remarquable de E^b à C qui correspond au plus petit mouvement possible²⁰⁰ de l'*Hypersphère* : une rotation d'un quart de tour et selon un seul axe. Les accords concernés étant de même type et leur fondamentales appartenant au même groupe de quatre. La même rotation se manifeste dans l'autre direction à la seconde 84 entre A et C.

Relations néo-riemanniennes

A la seconde 25 nous observons la relation L entre les deux accords relatifs F- et D^b.

A la seconde 27 nous voyons la plus petite rotation combinée possible : la relation P entre les deux accords relatifs F- et F.

A la seconde 30 nous relevons la relation R entre les deux accords relatifs E^b et c-.

Autres événements notables

A la seconde 4, les enchaînements et va-et-vient entre deux accords mineurs dont la fondamentale est distante d'une quinte : F- et B^b-.

A la seconde 20, le déplacement tonal typique en mode mineur : le cinquième degré se résolvant sur le premier : C, F-.

A la seconde 35, pour passer de D^b à C qui sont proches sur l'hypersphère, l'harmonie utilise la progression suivante : D^b, G⁷, C. C'est normal dans le contexte musical présent. En ce qui concerne la visualisation, ceci donne l'impression d'un détour géométrique.

Cette visualisation contient un éventail assez complet et très représentatif des passages rencontrés en musique tonale dont les trois relations P,L,R et les passages par la quinte. Nous rencontrons aussi les plus petits et le plus grand mouvement possibles sur l'hypersphère.

3.5.6. Purcell : accords non parfaits, retards et hypersphère

Nous présentons maintenant une visualisation d'une marche harmonique qui contient des retards que nous considérons comme accords non parfaits, dans le but de présenter les possibilités de notre système de visualisation. L'extrait utilisé est une adaptation de l'air célèbre *What Power Art Thou*, tirée de *King Arthur* d'Henri Purcell (1659-1965),

¹⁹⁹ Voir la table des distances spatiales et angulaires (Tableau 2-30) où les maxima sont pour {C,D-}, couple équivalent à celui-ci-dessus { E^b,F-}. Bien qu'harmoniquement proches, à cause de la décomposition de l'espace, ils sont éloignés sur l'hypersphère.

²⁰⁰ La plus petite rotation simple possible. C'est elle qui vient juste après les relations combinées correspondant aux P,L,R.

interprétée par Klaus Nomi²⁰¹ (1944-1983) sous le titre *The Cold Song*²⁰². Cette visualisation²⁰³ est une introduction à l'utilisation d'accords non parfaits. Cette pièce baroque comporte en général des accords parfaits qui s'enchaînent lentement et sont assez proches harmoniquement. La sphère utilisée est la seconde *Hypersphère des Accords*, où les symboles des accords sont situés sur la surface de la sphère. Nous utilisons le principe de l'*Hypersphère Généralisée* pour représenter les accords qui sont non parfaits (voir plus haut, chapitre 2.6.3). Nous rencontrons par exemple les accords de C°, C-4 (*do*, *mi*^b, *fa*) et G⁷²⁰⁴.

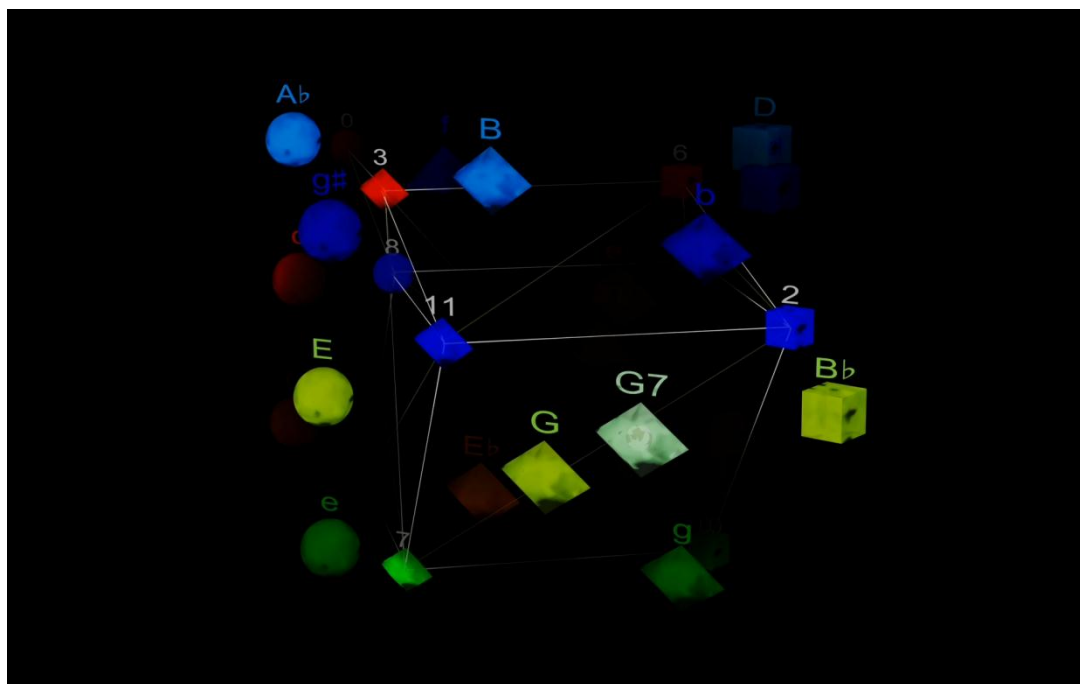


Figure 3-85 : Un accord non parfait sur l'hypersphère

L'extrait commence par une suite d'enchaînements d'accords dont les fondamentales sont distantes d'une quinte. La sphère tourne alors selon deux axes de façon homogène, le mouvement continu vers C° situé exactement au point correspondant à la note *do*. Les accords parfaits sont affichés une mesure avant leur apparition musicale et sont enlevés à la mesure suivante afin de ne pas surcharger l'animation et montrer leur caractère différent. Les accords suivants sont ainsi alternativement affichés et effacés²⁰⁵.

²⁰¹ Chanteur lyrique d'opéra et icône de la scène new age, il possédait une tessiture exceptionnellement étendue (de Baryton basse à contre-ténor) et une voix particulière Klaus Nomi a popularisé cet air d'opéra auprès du grand public.

²⁰² Enregistrement : Klaus Nomi *Encore !* RCA (1984).

²⁰³ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 6, *Cold Clip A 6 Cold*, p. 307.

²⁰⁴ A l'époque de Purcell, le tempérament n'était pas égal, l'enregistrement moderne de Klaus Nomi est en tempérament égal.

²⁰⁵ Liste non exhaustive, le passage comporte plus d'accords non parfaits, voir l'animation correspondante.

A la 20^{ème} seconde de l'animation apparaît au barycentre sphérique des points {0, 3, 5} l'accord non parfait, C⁻⁴ ²⁰⁶. Il est matérialisé par une sphère rose²⁰⁷. L'accord G⁷ {7,11,2,5} apparaît plusieurs fois, à côté de l'accord G {7,11,2} (voir ci-dessus la figure 3-85 extraite de l'animation). Voir la section consacrée aux accords remarquables (chapitre 2.6.5.2) ainsi que l'illustration correspondante.

Grâce à la lenteur des mouvements, cette animation permet de voir les accords non parfaits.

3.5.7. Chopin : espace circulaire

Nous visualisons un passage de la *sonate en mi mineur op 28 N°4* de Chopin dont la particularité circulaire a été illustrée par Dmitri Tymoczko²⁰⁸. Cet exemple a pour but de comparer les deux systèmes de visualisation et de vérifier si le modèle *Planet* présente un intérêt pour cet espace. Par souci de cohérence, nous utilisons les mêmes notations que Tymoczko en ce qui concerne le chiffrage des accords, mais conservons bien sûr les idéogrammes du système *Planet*.

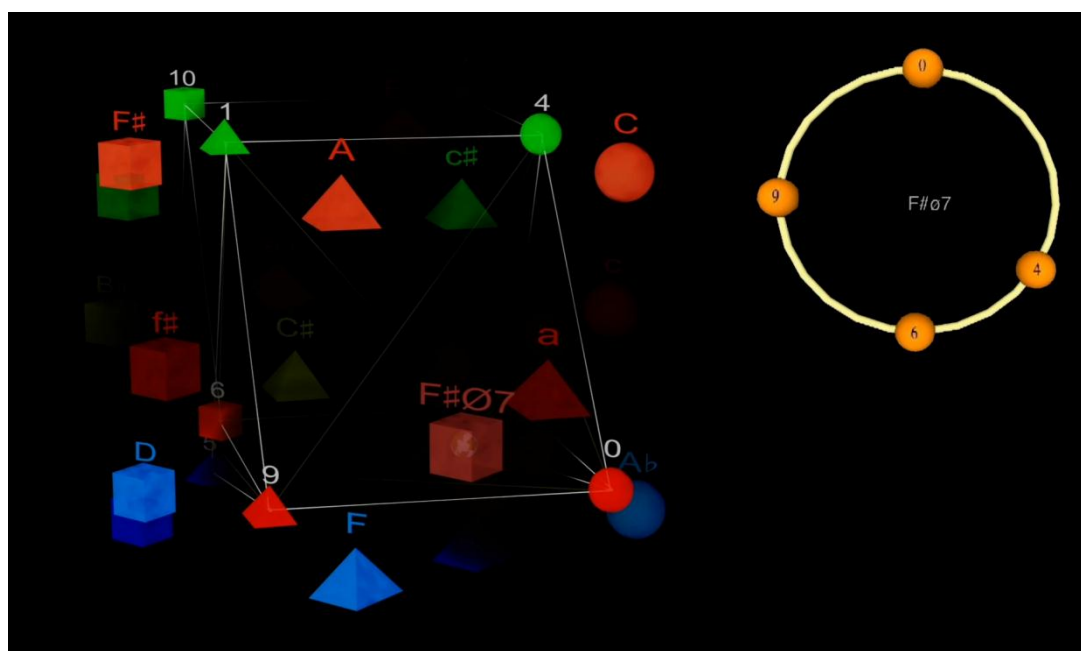


Figure 3-86 : Un extrait de Chopin avec l'*Hypersphère* et l'espace de Tymoczko

La figure 3-86 ci-dessus est extraite de l'animation²⁰⁹. A gauche, nous retrouvons l'*Hypersphère des Accords*, à droite, l'animation originale de Dmitri Tymoczko utilisée avec l'aimable autorisation de l'auteur.

²⁰⁶ Bien qu'il ne s'agisse que d'un effet de retard au vu du contexte, nous avons matérialisé cet accord afin de montrer les possibilités de notre système de représentation.

²⁰⁷ Sphère dans les tons rouges, car c'est un accord de *do*. Rose afin de bien montrer que ce n'est pas un accord parfait.

²⁰⁸ Voir (Tymoczko, 2006) et l'article francophone (Andreatta, 2006).

²⁰⁹ L'animation est disponible sur le support informatique joint, Clip A 7, Chopin Circular Space, p. 307.

La musique utilise des accords à quatre sons, pour lesquels nous construisons des symboles que nous disposons à la surface de la sphère. Ce sont des accords tonals, la fondamentale est bien identifiée, nous utilisons la symbolique du système *Planet* en altérant légèrement la couleur²¹⁰. Les accords diminués, symétriques, sont centrés sur la fondamentale et représentés en gris clair. Les accords parfaits sont toujours dessinés, lorsqu'un accord non parfait est employé, sa couleur est révélée à la mesure précédente, il est effacé après son utilisation.

La représentation de Tymoczko, plaçant chaque note le long d'un cercle fait bien apparaître le mouvement de chaque note séparément et exprime la circularité de l'espace. Il est aisé de suivre le mouvement des quatre notes qui semblent se poursuivre. L'*Hypersphère des Accords*, animée de rotations combinées en cascade, marque plus précisément les changements d'accords, mais ne retranscrit pas la circularité, les accords étant souvent éloignés. Les extensions des accords n'apportent rien à la fonction harmonique de l'accord, donc ne changent pas l'analyse, en revanche, elles changent le barycentre et font tourner la sphère sans apporter d'information musicale pertinente. Le modèle circulaire, contrairement au modèle *Planet*, ne permet pas de voir instantanément les accords proches²¹¹.

La variante en quatre dimensions créée par Dmitri Tymoczko est quasi-statique : une sphère matérialisant la position de l'accord se déplace dans un tesseract projeté en 3D dont les sommets changent en fonction du contexte. L'auteur sait que la vision en quatre dimensions est plus riche, mais plus difficile à apprécier que le modèle circulaire (Tymoczko, 2011, p. 112). Elle apporte plus d'informations, mais est plus difficile à suivre que le modèle *Planet* car les sommets de son hypercube changent en fonction du contexte (voir le chapitre 2.4.7 pour une comparaison entre le système *Planet* et l'espace de Tymoczko).

Conclusion

Pour cet exemple, avec ce type de contrepoint, la représentation sur un cercle est la plus démonstratrice.

3.5.8. Reprises avec l'*Hypersphère Généralisée AnySet*

L'*Hypersphère Généralisée AnySet* est assez difficile à percevoir sans y être habitué²¹². Elle est surtout destinée aux pièces atonales ou comportant des accords non parfaits. Afin de comparer les différents systèmes de visualisation en hyperspace et de permettre au spectateur de

²¹⁰ Par exemple le symbole de l'accord $B7 \flat 5 \{11,3,5,9\}$ est de même forme cubique que sa fondamentale $Si \flat$, mais de couleur bleue plus sombre. Cette coloration est purement esthétique et permet de différencier les accords non parfaits tout en les associant à leur fondamentale.

²¹¹ Dans "A Geometry of Music", Tymoczko compare ses deux représentations et écrit à propos de l'espace circulaire "In circular pitch-class space, it is not immediately obvious which of this chord's transpositions it is closest to".

²¹² Impressions partagée par les mathémusiens David Camplitt et Thomas Noll lors de la présentation du concept au centre Pompidou.

se familiariser avec cette dernière, nous visualisons de nouveau quelques exemples précédents²¹³.

Beethoven et l'*Hypersphère Généralisée*

Nous avons repris cet exemple car quoique rapide, c'est le plus connu chez les mathémusiciens. Les accords parfaits sont grisés et le restent tout au long de l'animation. Le chemin suivi n'est plus matérialisé. Le but est de montrer l'*Hypersphère Généralisée AnySet* dans son plus simple appareil.

Albini et le chemin hamiltonien

L'utilisation de la *corale #4* suivant lentement un chemin où une seule note de l'accord varie entre chacun d'eux est parfaitement adaptée à la familiarisation du spectateur avec l'*Hypersphère Généralisée* présentée comme précédemment dans sa version la plus sobre.

Chopin et l'espace circulaire de Tymoczko

Cette visualisation utilise l'*Hypersphère des Accords* légèrement différemment. Dans ce cas particulier, nous avons ajouté les symboles des accords non parfaits utilisés lors de la visualisation précédente de l'espace circulaire. Ce sont les mêmes idéogrammes que ceux utilisés pour la première version de "Chopin circular Space". Les symboles de tous les accords parfaits sont présents et normalement grisés, les symboles des accords non parfaits ne sont pas représentés. Au passage d'un accord, sa couleur est révélée et le symbole se grise de nouveau après emploi. S'il s'agit d'un accord parfait, il reste gris, sinon il est effacé. Avec cette mise en image, la vidéo semble plus compréhensible, mais la circularité de l'espace n'est pas mieux visible. L'*Hypersphère Généralisée AnySet* peut, par contre, représenter n'importe quel accord (voir chapitre 2.6.5).

3.5.9. Stravinsky

Dans le cadre tonal, les œuvres ont été étudiées avec la théorie néo-riemannienne ou de façon traditionnelle. L'*Hypersphère des Accords* est un moyen de visualiser les relations connues des musicologues et de les présenter au profane. Nous l'essayons à présent²¹⁴ dans un cadre atonal.

L'œuvre présentée est la troisième des quatre études pour orchestre composées par Igor Stravinsky (1882-1971)²¹⁵.

Le premier accord de *Cantique* est à cinq sons {1,8,5,2,9}. Représenté sur un cercle ou un segment de droite, le centre de symétrie est le point 5 (11 est aussi une possibilité sur le cercle). Dans notre espace à quatre dimensions, le barycentre sphérique calculé est unique, c'est le point 5 car

²¹³ Voir Clip A 8, Beethoven and the Hypersphere of *AnySet* ; Clip A 9, Hamiltonian Path on the Hypersphere of *AnySet*; Clip A 10, Chopin Circular Pitch Space *AnySet*, p. 308.

²¹⁴ L'animation est disponible sur le support joint : Clip A 11, Stravinsky's on the Hypersphere, p. 308.

²¹⁵ Enregistrement avec CBC Symphony Orchestra dirigé par Igor Stravinsky à Toronto 1962.

dans chacun des sous-espaces à deux dimensions, 5 est le barycentre. La symétrie se remarque selon les deux axes du modèle²¹⁶.

Le second accord est à cinq sons {2,4,8,9,10}. Son centre de symétrie musical est clairement le point 9 (ou son triton 3). Dans notre espace à quatre dimensions ce centre apparaît à l'opposé du point 9 selon un deux plans 4D. Ceci est une des particularités du modèle détaillée au chapitre 2.6.5.5. Le symbole de la note 9 est néanmoins central dans la représentation (voir ci-dessous figure 3-87).

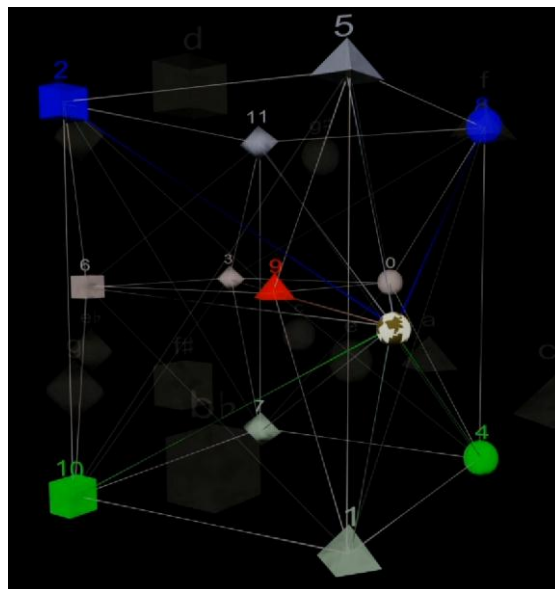


Figure 3-87 : Un accord symétrique chez Stravinsky

Nous remarquons une suite d'accords particulière qui se répète, formant ainsi le thème du morceau. Elle est composée de trois accords alternant, nous les écrivons A_1 {1,2,5,9}, A_2 {6,3,4,10} et A_3 {0,3,7,11}.

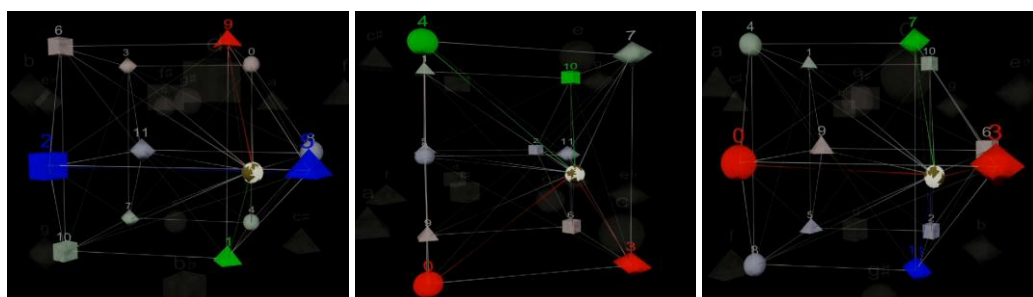


Figure 3-88 : Une suite répétitive chez Stravinsky

Quelques mesures après le départ, nous entendons le motif qui se renouvelle au long de la pièce. L'enchaînement est $A_1, A_2, A_3, A_1, A_2, A_3, A_2, A_1, A_2, A_3, A_2$. La figure 3-88 ci-dessus montre les trois accords de gauche à droite A_1, A_2, A_3 .

²¹⁶ Les symétries se combinent selon les deux directions dans le modèle *Planet-4D* : les points {1,9} ayant pour barycentre le point 5 ; les points {2,8} ayant pour barycentre, entre autres, les points 5 ou 11 (voir singularités pour le couple de tritons au chapitre 2.6.5.4).

L'accord A_1 est symétrique selon les deux plans, la position sur l'*Hypersphère* est centrée sur un point situé entre {2 et 5} dans le premier plan et entre {1 et 9} dans le second plan (voir ci-dessus figure 3-88).

L'accord A_2 n'est pas symétrique, A_3 est de même forme qu' A_1 , la position sur l'*Hypersphère* est centrée sur un point situé entre {0 et 7} dans le premier plan et entre {7 et 11} dans le second plan (voir ci-dessus figure 3-88).

3.5.10. Schoenberg

Nous proposons l'étude de la troisième petite pièce des "Sechs Kleine Klavierstücke" op. 19, composée par Arnold Schoenberg (1874-1951)²¹⁷. Les accords s'enchaînent en rajoutant, mais aussi en supprimant une note à l'accord précédent. La sphère tourne plus ou moins rapidement au gré des changements d'accords.

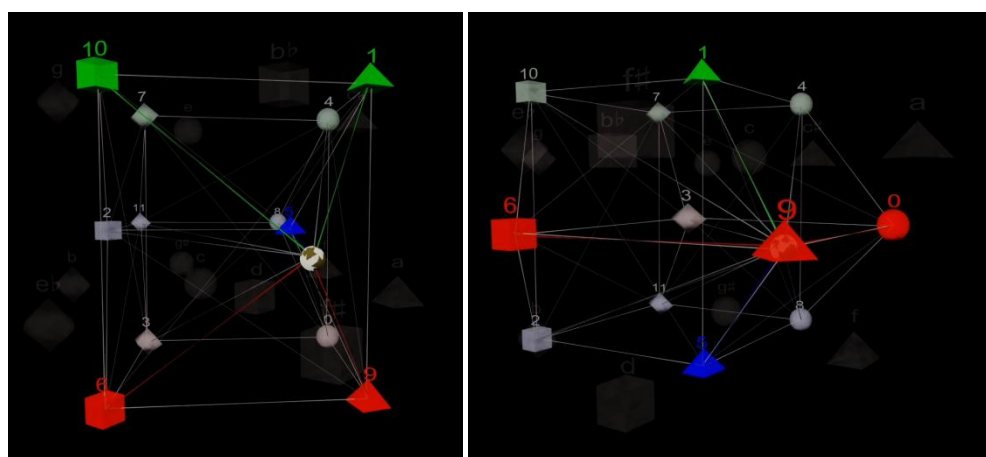


Figure 3-89 : La symétrisation d'un accord chez Schoenberg

La figure 3-89 ci-dessus illustre un passage entre un accord à 5 sons {1,5,6,9,10}, qui n'est pas symétrique²¹⁸, mais le devient à la mesure suivante en changeant une seule note. L'accord devient {1,5,6,9,0}, clairement centré sur 9. Il s'agit de deux symétries selon les deux axes du modèle *Planet*. Nous voyons clairement, graphiquement, que le point 9 est au centre du couple {1,5} et du couple {0,6}.

²¹⁷ L'animation est disponible sur le support joint : Clip A 12, Schoenberg on the Hypersphere, p.308.

²¹⁸ En lui rajoutant la note 2 il serait très symétrique, car constitué de deux triades augmentées voisines.

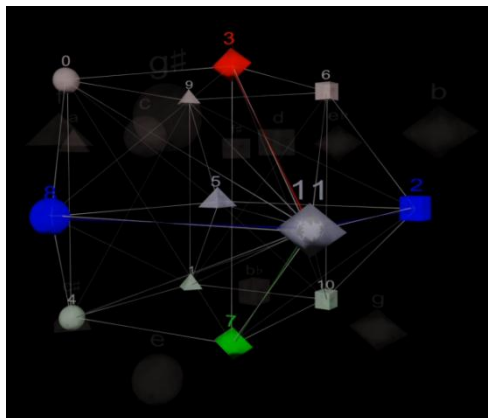


Figure 3-90 : Un centre de symétrie sur une note non jouée chez Schoenberg

Nous remarquons la présence d'accords symétriques par rapport à une note non jouée. Par exemple, à la seconde 23, l'accord $\{2,3,7,8\}$ est centré sur le point 11 (ou sur son triton 5). Voir ci-dessus, figure 3-90.

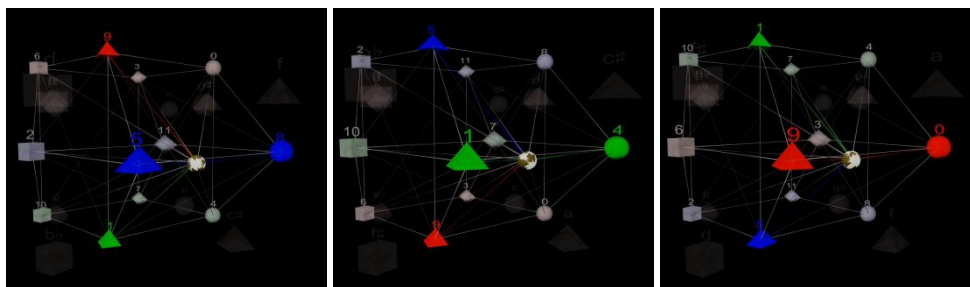


Figure 3-91 : Un enchaînement selon une rotation 4D chez Schoenberg

La figure 3-91 ci-dessus illustre l'enchaînement d'accords de quatre notes joués à la 25^{ème} seconde de l'animation. Le trio $\{1,5,9\}$ correspond aux sommets d'un graphe C_3 dans le modèle *Planet* et ne change pas. La quatrième note décrit les sommets d'un second graphe C_3 (8,4,0), entraînant ainsi une rotation élémentaire de l'*Hypersphère* selon son premier axe²¹⁹. La visualisation avec l'*Hypersphère des Accords* est remarquable.

3.5.11. Webern

Nous terminons cette section par une présentation issue de l'œuvre d'Anton Webern (1883-1945) : la cinquième des "Sechs Bagatellen" pour quatuor à cordes²²⁰.

Bien que la richesse des timbres et des nuances contribue à la réputation de cette pièce, nous nous limitons à l'étude des classes de hauteurs et à l'observation de la projection de celle-ci avec l'*Hypersphère Généralisée AnySet*. Le nombre de notes jouées simultanément va de une à

²¹⁹ Voir le chapitre 2.3.2 pour les axes de l'hypersphère.

²²⁰ Les bagatelles illustrent le sommet de l'une des périodes les plus fascinantes de l'œuvre de Webern, celle des œuvres "aphoristiques" (1909-1914).

cinq, ce que nous considérons comme des accords et visualisons²²¹. Les deux premiers accords sont $\{0,1,4\}$ et $\{0,3,4\}$, leur aspect est semblable (voir ci-dessous figure 3-92). Les centres de ces deux accords ne correspondent à aucune note, mais ont une position symétrique par rapport au point 2²²².

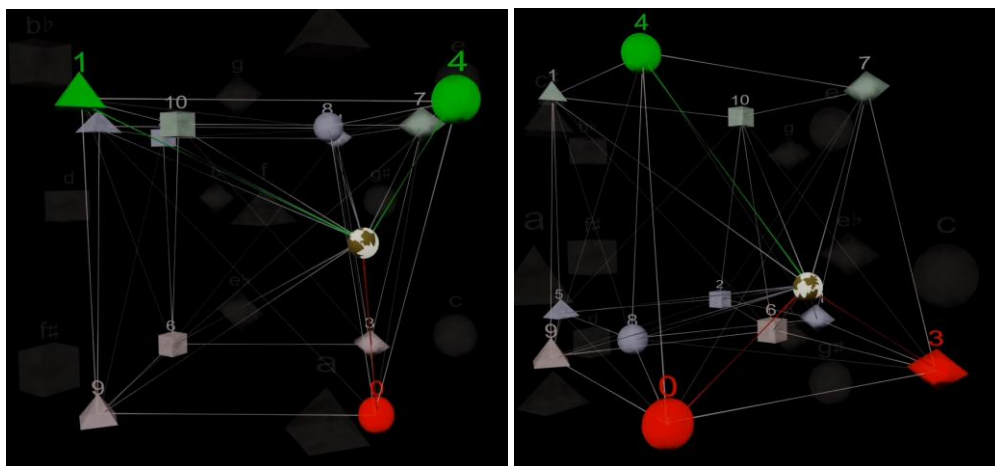


Figure 3-92 : Deux accords symétriques par rapport au point 2 chez Webern

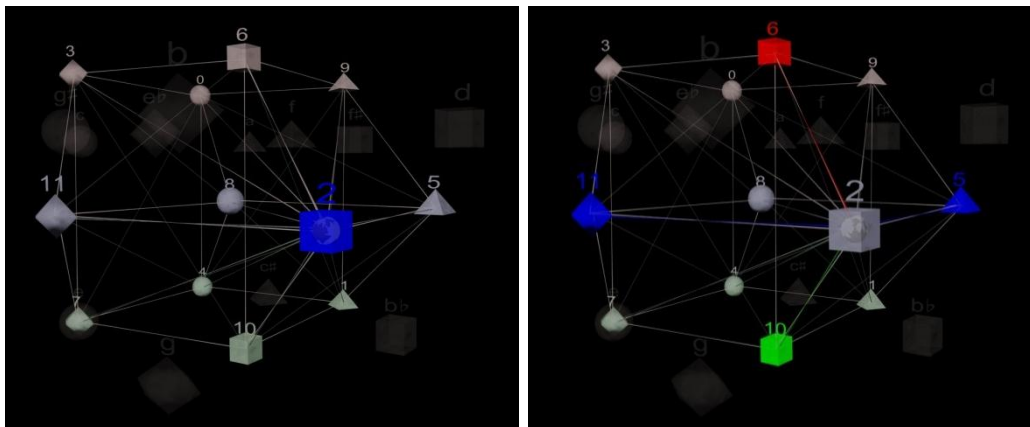
Suite à un silence que nous matérialisons par un assombrissement de l'image, nous retrouvons une seule note : 2. Nous observons ensuite, un accord particulièrement symétrique que le modèle *Planet* met en valeur : $\{5,6,10,11\}$. Il est centré exactement sur le point 2, barycentre sphérique des notes composant l'accord²²³. La particularité de la représentation montre bien que cet accord ne contient pas la note 2 mais qu'il y est centré. La figure 3-93 ci-dessous montre à gauche la note ré (2), à droite l'accord centré sur ré, mais sans ré. Grace à l'*Hypersphère des Accords AnySet*, nous remarquons instantanément que l'*Hypersphère* est dans la même position et que seules les notes présentes dans l'accord ont changé²²⁴.

²²¹ L'animation est disponible sur le support informatique joint, voir Clip A 13, Webern on the Hypersphere, p. 308.

²²² Le point 2 est situé à l'arrière car le barycentre sphérique a été déterminé comme le plus proche sur la sphère, le centre de symétrie que nous voyons est un point sur la sphère, opposé à 2, dans le plan contenant les triangles.

²²³ Nous pouvons aussi l'expliquer moins formellement, de manière idéographique : concernant la forme, nous avons deux cubes $\{6,10\}$ et deux formes adjacentes $\{5,11\}$, la moyenne sera donc le cube. Concernant la couleur, nous avons deux bleus $\{5,11\}$, un rouge 6 et un vert 10, la moyenne sera bleue. D'où le symbole résultant, "Cube Bleu", correspondant à la note 2.

²²⁴ La forme projetée en 3D puis 2D est identique, seuls les points présents dans l'accord sont coloriés.

Figure 3-93 : La note *ré* et un accord symétrique sans *ré* chez Webern

A la seconde 33 nous observons un accord symétrique $\{0,5,6,10,11\}$ dont le centre n'est pas une note, mais un point diamétralement opposé au point 10 dans le cercle passant par les points $\{2,6,10\}$ (voir ci-dessous figure 3-94).

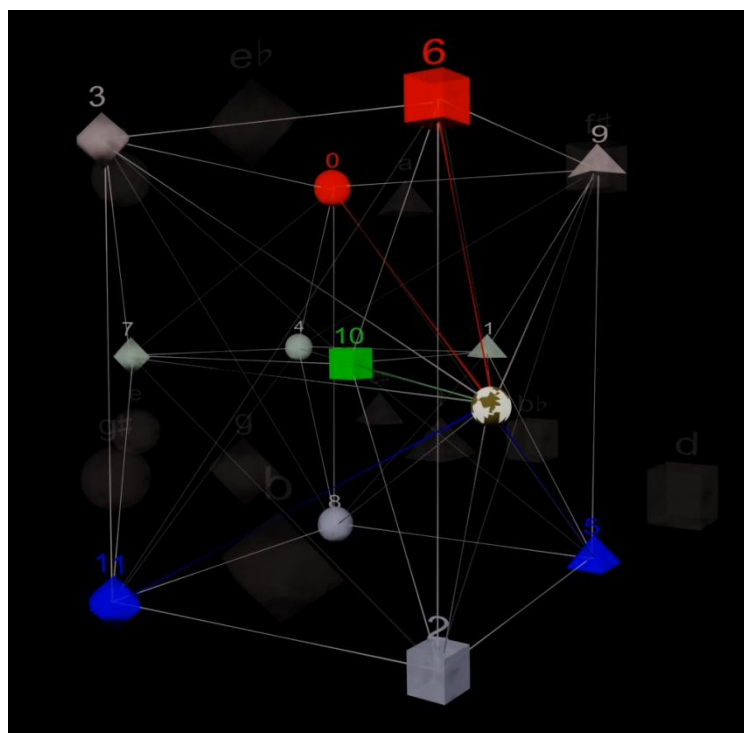


Figure 3-94 : Une symétrie par rapport à un point sans note chez Webern

A la 37^{ème} seconde, un passage se déroule le long du cercle chromatique imaginé à la surface de l'*Hypersphère* : nous avons la suite d'accords $\{7,8\}$, $\{6,7,8\}$, $\{8,9\}$, $\{7,8,9\}$. Dans ce cas la sphère tourne selon un axe perpendiculaire au cercle chromatique. La même chose se reproduit avec les accords $\{4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{4,3\}$, $\{2\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$, $\{11,0\}$ et enfin avec $\{8,9\}$, $\{7\}$, $\{7,8\}$, $\{8\}$.

La dernière position est le point 2, correspondant à la note *ré* jouée.

La sphère tourne alors que la musique ne semble pas changer, car des accords sont formés en retirant une note.

Avec cette représentation, il apparaît visuellement que 2 est un centre géométrique et musical pour cette composition.

3.6. CONCLUSIONS MATHEMUSICALES

Toutes les projections spectrales possibles des *Tonnetze* à douze tons circulants ont été montrées au chapitre 2.5.1. Parmi les projections des réseaux circulants étudiés ici, nous retrouvons les formes géométriques qui sont des polygones à 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 cotés. Ces nombres sont les diviseurs de 12.

La projection du graphe associé au clavier du piano fait clairement apparaître ses symétries.

Les représentations des graphes permettent au non musicien de repérer des dissymétries, par exemple avec le graphe représentant l'espace de Weitzmann.

L'espace de Weitzmann, à première vue non symétrique, donne avec la méthode des *graphes de graphes*, la projection 4D utilisée pour le modèle *Planet*.

Les projections d'espace d'accords montrent des progressions par quartes, ou chromatiques, les matrices ne sont pas circulantes intégralement.

L'utilisation de *graphes de graphes* permet de représenter de façon plus lisible et d'appréhender plus directement les relations entre groupes d'accords.

Le système idéographique du modèle *Planet* permet de voir très rapidement les groupes en relation. Les symboles se superposent toujours en rapport avec le système idéographique du modèle *Planet* : par forme, couleur, luminosité ou par combinaison de ces trois paramètres.

En observant le *graphe de graphes* associé à l'espace de Weber, la prépondérance des relations entre groupes de relatifs distants d'une quinte devient évidente.

Le *Cube Dance* de Jack Douthett ainsi que le *graphe de Weitzmann*, défini par Richard Cohn, sont plongeables dans l'espace du modèle *Planet*.

Concernant les analyses musicales

En considérant les sommets du modèle *Planet* comme des accords, celui-ci est adapté à la démonstration des séquences de John Coltrane ou à d'autres enchaînements par quintes, par tierces ou chromatiques.

L'*Hypersphère des Accords* dans sa première version permet au spectateur de s'adapter à la visualisation en quatre dimensions, les animations réalisées avec l'extrait de la 9^{ème} de Beethoven et le suivi de chemin hamiltonien de Giovanni Albinoni montrent la régularité du modèle, car nous suivons uniquement des transformations P,L,R.

Lorsque la musique n'est pas construite exclusivement avec des transformations P,L,R, ce qui est le cas général, l'*Hypersphère des Accords* permet de suivre l'harmonie et de repérer instantanément des autres

déplacements remarquables : mouvements de quinte ou chromatiques qui correspondent à deux rotations combinées de la sphère.

Les rotations étant synchrones avec la musique, il est aisé à chacun de repérer une certaine logique dans le système de visualisation, le plus simple étant la matérialisation de va-et-vient entre deux accords.

En harmonie tonale, il y a une fonction qui renvoie toujours à un accord parfait composé de deux tierces superposées, ainsi les accords étendus sont proches harmoniquement et physiquement des accords parfaits. Par exemple, lors de la visualisation de l'accord de G⁷, nous remarquons la proximité de G.

Les accords diminués et augmentés (° et +) n'ont pas de fonction tonale. Il n'y a pas de cas d'accord symétrique autour d'une note non jouée : par exemple, {mi^b, fa[#], la} ne peut être considéré comme une fonction harmonique centrée sur do.

Le système atteint une des limites dans le cas précis de la visualisation circulaire. *L'Hypersphère des Accords* montre un résultat correct, mais la circularité n'est pas pertinemment démontrée visuellement.

En mode atonal, avec *l'Hypersphère Généralisée AnySet*, nous remarquons immédiatement des symétries et dissymétries dans les œuvres présentées. Voici les invariances remarquées.

- Conservation de la forme d'un accord malgré une rotation de la sphère.
- Conservation du centre de symétrie malgré un changement d'accord.
- Conservation de la direction de rotation malgré un changement de notes.
- Conservation de la forme du modèle, et positions de chaque accord en surface de la sphère.
- Conservation de la position centrale du spectateur malgré une rupture de symétrie.
- A chaque écart harmonique correspond une même distance physique dans le modèle 4D.

Au premier abord, nous aurions pu penser que la musique atonale, qui peut apparaître à certains comme chaotique ou désorganisée, se traduisît par une visualisation hétéroclite. *L'hypersphère généralisée AnySet*, en mode atonal permet de faire apparaître visuellement certaines symétries et dissymétries propres à cette musique.

Thèse en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Université Toulouse II-Le Mirail - Laboratoire LLA- Créatis

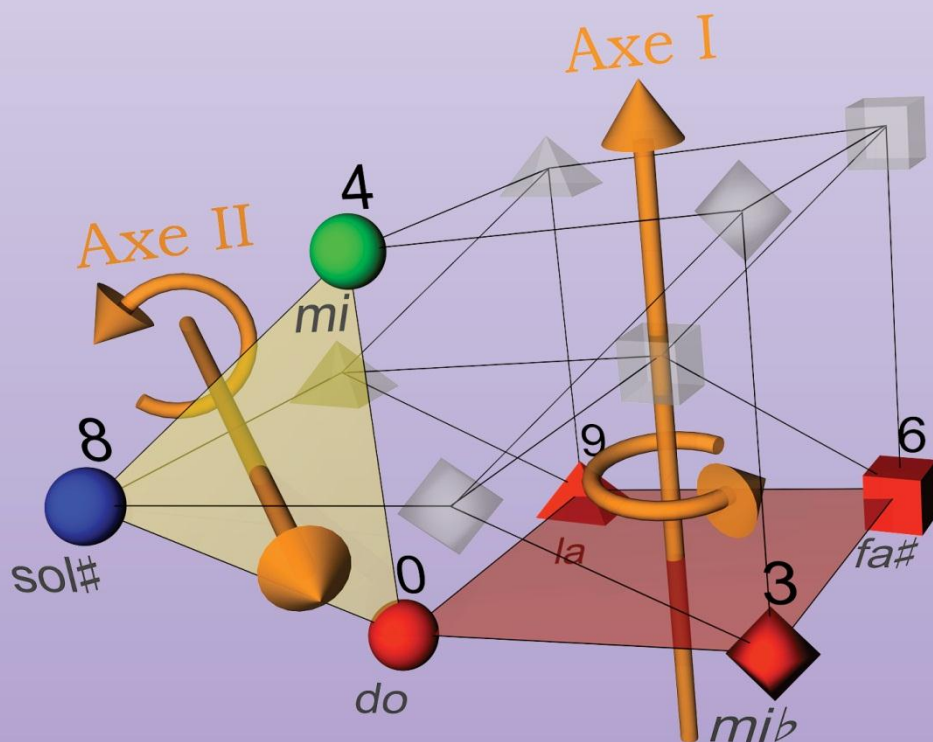
• Spécialité Musique •

Présentée et soutenue publiquement par

Gilles BAROIN

Le 5 décembre 2011

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

Conclusion

4.1. CONCLUSIONS

Pour conclure cette étude, nous revenons au cadre de départ²²⁵ et vérifions que la finalité de cette recherche soit respectée. Nous résumons les résultats obtenus et proposons quelques pistes de réflexion.

A partir des conditions de symétrie définies dans l'introduction, nous avons cherché et trouvé un nouveau modèle géométrique représentant les douze notes dans un espace qui lui soit propre. Le système de représentation vérifie les conditions d'invariance et de symétrie en termes de musique, de géométrie et de paramètres idéographiques.

Les choix musicaux peuvent être perturbants pour une analyse musicale traditionnelle, car nous sommes dans le cadre de la *Set Theory*. Nous sommes conscients des limites de cette dernière, l'objet de cette étude n'était pas de justifier cette théorie mais de l'utiliser pour créer un modèle.

4.2. RESULTATS SIGNIFICATIFS

4.2.1. Modèles de représentation

Le système de représentation et d'analyse présenté ici se décline en plusieurs versions :

Le *Graphe Planet* est un graphe de Cayley métacirculant, utilisé pour mesurer des distances en termes de graphe, calculer des chemins, et projeté spectralement pour créer le modèle géométrique *Planet-4D*. La coloration par nombres complexes des sommets du graphe est associée à un ensemble d'idéogrammes possédant les caractéristiques d'une langue artificielle.

Le *modèle Planet-4D* est un univers de représentation graphique en quatre dimensions, associé au même système idéographique. Il possède douze sommets symbolisant des objets musicaux différents selon le contexte : notes, accords ou gammes.

L'*Hypersphère des Accords* est une extension du modèle précédent, où n'importe quel accord parfait, ou agrégat de notes non symétrique, se positionne en surface de la sphère.

L'*Hypersphère Généralisée AnySet* est une représentation graphique de l'*Hypersphère des Accords* adaptée à la musique atonale.

Chaque version a ses propres applications pour l'analyse musicale. Les œuvres étudiées doivent être transcrites sous forme de suite d'accords. Le problème de représentation des accords non parfaits symétriques peut se

²²⁵ Voir les conditions de départ définies en introduction au chapitre 1.1.

contourner en donnant une préférence à l'une des notes de l'accord, ce qui est élémentaire dans un cadre tonal. Cet aspect est une contrepartie secondaire, mais nécessaire pour pouvoir représenter n'importe quel accord sans changer le système de visualisation.

4.2.2. Analyse d'objets musicaux

En appliquant la théorie spectrale des graphes à d'autres objets musicaux, nous avons fait apparaître visuellement les symétries et dissymétries des claviers de pianos et accordéons, qui sont les interfaces entre la pensée du musicien et sa matérialisation. Nous avons retrouvé graphiquement des arrangements et motifs connus des instrumentistes.

En transformant les dessins originaux, nous avons vu que les célèbres graphes *Cube Dance* de Jack Douthett et *graphe de Weitzmann* défini par Richard Cohn, sont plongeables dans l'espace du modèle *Planet*²²⁶.

En utilisant le système idéographique du modèle *Planet* pour représenter les réseaux de notes ou d'accords existants, nous remarquons instantanément les symétries de l'objet étudié.

En associant projection spectrale et système idéographique, nous faisons apparaître très rapidement les groupes en relation, les symboles se superposent toujours : par forme, couleur, luminosité ou par combinaison de ces trois paramètres.

En construisant des *graphes de graphes*, nous avons représenté de façon plus lisible les relations entre groupes d'accords et rendu circulant des graphes qui ne l'étaient pas, pouvant ainsi effectuer une analyse spectrale.

Nous avons utilisé la théorie des graphes pour trouver le modèle. L'utilisation de la théorie spectrale est nouvelle dans le domaine mathémusical, l'espace engendré est un ensemble discret de points à la surface d'une hypersphère.

Le modèle calculé est un ensemble discret de points, nous l'avons comparé aux modèles existants²²⁷ afin d'en définir les points communs et les aspects complémentaires.

La position de l'utilisateur est centrale et ne change pas, c'est l'*Hypersphère* qui tourne sur elle-même.

Nous avons cherché à comparer nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes, notamment en termes de distances. Notre méthode de calcul de distances dans l'*Hypersphère des Accords* donne des résultats qui sont analogues à ceux trouvés par des méthodes différentes²²⁸.

4.2.3. Analyses musicales

²²⁶ Voir le chapitre 3.3.6 pour les similitudes avec les travaux de Jack Douthett et Richard Cohn.

²²⁷ Voir le tore de Guerino Mazzola au chapitre 2.4.6 et l'espace à quatre dimensions de Dmitri Tymoczko, au chapitre 2.4.7.

²²⁸ Voir les distances dans le modèle *Planet-4D* et le résultat d'Emmanuel Amiot au chapitre 2.6.4.

Nous avons réalisé, à partir d'œuvres musicales existantes connues, des animations en image de synthèse montrant les progressions harmoniques internes de ces créations. Ainsi, un novice pourra appréhender visuellement une logique interne qu'habituellement, seul, le musicien perçoit et essaie expliquer avec ses mots (techniques). Les animations aident, d'autre part, le musicien savant à mieux formaliser les relations qu'il connaît déjà et, ainsi, à transmettre ses connaissances. Il n'est pas rare que certains musiciens expérimentés, suite à la visualisation des animations 3D, découvrent une autre manière de présenter des principes qu'ils connaissaient déjà, mais formulaient plus laborieusement.

L'utilisation de la 4D animée est nouvelle pour ce genre d'applications, elle permet pour les modèles présentés tels que *Planet-4D* ou l'*Hypersphère des Accords*, de mieux percevoir les symétries de ces modèles. Grâce à l'utilisation d'idéogrammes à deux ou trois dimensions, l'arrangement des formes et couleurs trouve une pertinence nouvelle et indique plus intuitivement l'harmonie intrinsèque. Tout profane découvre alors une certaine logique dans la représentation. Les représentations et formalisations traditionnelles ne sont pas forcément intuitives pour celui qui ne connaît pas, ou peu, les noms de notes d'accords et leurs significations.

Lorsque le système de composition de Schoenberg fût introduit, les critiques de l'époque étaient véhémentes²²⁹, certains lui reprochant une anarchie complète. De nos jours Schoenberg est mieux apprécié et, avec l'*Hypersphère des Accords* en mode atonal, nous pouvons faire apparaître de nombreuses cohérences et symétries dans la musique atonale. L'exemple de Webern présenté au chapitre 3.5.11 est l'un des plus pertinents, il montre une organisation très symétrique des hauteurs de notes.

4.3. PERSPECTIVES

Nous avons fourni des interprétations musicales pour certains types de graphes mais n'avons pas trouvé d'analogie pour les notions suivantes qui sont importantes en théorie des graphes : graphes parfaits, graphes planaires, graphe infinis, nombre chromatique.

Sur l'*Hypersphère des Accords*, les accords parfaits ainsi que quelques accords qui leur sont proches ont une position unique et déterminée, il convient de chercher quels sont les autres accords dans ce cas et quels sont les accords dont la position n'est pas sur sphère et quels sont les accords partageant une même position.

Nous avons étudié des réseaux d'accords en tenant compte de pondérations inspirées des théories anciennes. Il serait pertinent de construire un graphe pondéré tenant compte des valeurs psycho acoustiques des différents enchaînements d'accords (Krumhansl & Kessler, 1982).

²²⁹ A propos du poème symphonique *Pelleas et Mélisande* (1903) de Schönberg, un critique de la *Wochenschrift für Kunst und Musik* écrit : « anarchie complète, des paroxysmes musicaux et des violences de la pire espèce, la négation de toute esthétique musicale. » cité par (Buch, 2006), p. 93.

Le modèle *Planet* est défini pour 12 notes, il fait apparaître les symétries et la décomposition de 12 en deux facteurs premiers. En utilisant la même méthode pour une autre décomposition de l'octave les symétries seraient différentes. Il est envisageable d'essayer des décompositions simples de l'octave comme par exemple $15 = 3 * 5$.

Le modèle développé étant discret, si un cadre microtonal est défini avec ses notes et accords, il doit être possible d'en faire une visualisation.

Il existe des analogies entre les représentations d'un rythme et de l'espace des hauteurs, il doit donc exister une analogie et un cadre dans lequel un système de visualisation semblable pourrait représenter des rythmes.

Si il existe une modélisation mathématique des paramètres timbres, et intensité qui soit transposable sur une hypersphère, il doit être possible de faire apparaître visuellement d'autres symétries dans la musique tonale et atonale.

Le système *Planet* est basé sur une décomposition de l'octave en douze demi-tons égaux, qu'advierait-il de nos graphes et de nos visualisations si nous utilisions un système diatonique à sept notes ou pentatonique.

Les objets musicaux étudiés étaient tous sommet-transitifs, il serait pertinent de construire et d'analyser des graphes où les sommets seraient de nature différente. L'analyse commencerait par les graphes constitués des principaux accords à quatre sons de Jack Douthett, puis s'étendrait à tous les accords de quatre sons répertoriés dans la *Set Theory* ou présents dans les hypercubes de l'espace de Dmitri Tymoczko. Nous pourrions alors plonger d'autres graphes plus complexes dans un nouveau modèle géométrique.

4.4. UNE APPLICATION POUR CHACUN

Selon ses connaissances et ses intérêts, le lecteur spectateur appréciera diversement les résultats.

Le musicien débutant remarquera la simplicité du Blues, les régularités évidentes de la musique tonale, qui ne comporte que des accords parfaits, et des transformations simples, les arrangements de formes et de couleurs symétriques.

Le passionné cherchera à reproduire ou modifier des parcours harmoniques existants et à comprendre les mécanismes des enchaînements d'accords.

Le chercheur utilisera directement les calculs des positions d'accords ou bien la visualisation pour trouver des symétries et des mécanismes récurrents dans des œuvres qu'il étudie.

Le mathématicien verra et entendra, avec surprise et intérêt, une application concrète de la théorie des graphes et de la géométrie en hyperespace.

Le mathémusicien cherchera à comparer le système *Planet* avec les modèles existants en précisant son cadre. Il utilisera les visualisations dans un environnement pédagogique.

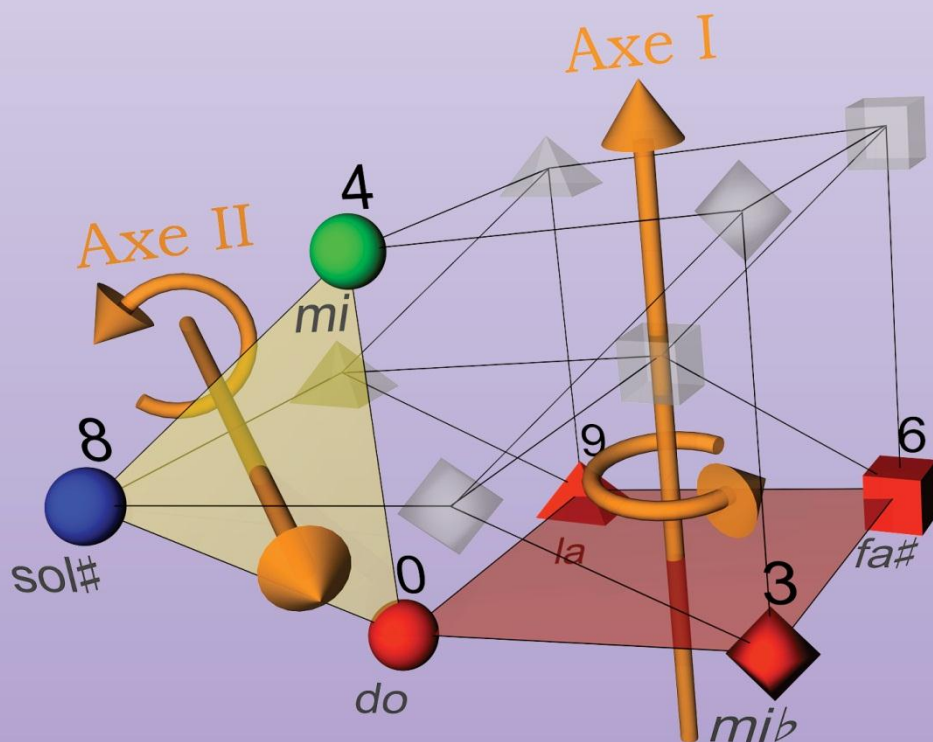
"Coxeter was so entranced with the fourth dimension in grade school that he was dismally behind on the Mathematica basics²³⁰. To compensate, when he was cramming for the entrance exams to Cambridge, his tutor forbade him from thinking in four dimensions - except on Sundays. "

Coxeter était tellement passionné par la quatrième dimension à l'école primaire qu'il était lamentablement en retard concernant les mathématiques de base. Pour compenser, quand il préparait les examens d'entrée à Cambridge, son tuteur lui avait interdit de penser en quatre dimensions - sauf les dimanches.

"

²³⁰ (Roberts, 2006).

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

Bibliographie

- Albini, G., & Antonini, S. (2009). Hamiltonian cycles in the topological dual of the tonnetz. *Mathematics and Computation in Music*, 1-10.
- Alspach, B., & Parsons, T. (1982). A construction for vertex-transitive graphs. *Canad. J. Math*, 34(2), 307-318.
- Amiot, E. (2009a). About the number of generators of a musical scale. *Arxiv preprint arXiv:0909.0039*.
- Amiot, E. (2009b). Eine Kleine Fourier Musik. *Mathematics and Computation in Music*, 469-476.
- Amiot, E. (2011). Une distance fondée sur les phases de certains coefficients de Fourier *Communications personnelle Ircam*.
- Amiot, E., Noll, T., Agon, C., & Andreatta, M. (2006). *Fourier Oracles for Computer-Aided Improvisation*. ICMC 2006, New Orleans.
- Andreatta, M. (2003). *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle: aspects théoriques, analytiques et compositionnels*. Université de Caen.
- Andreatta, M. (2006). Visions scientifiques-Art & science-Geometrie d'un Prelude. *Pour la Science*(349), 96-97.
- Andreatta, M. (2011, 10.06). [La musique est-elle purement mathématique ?]. Interview Radiophonique, Michel Alberganti, Science Publique, France Culture.
- Anger-Weller, J. (1990). *Clés pour l'harmonie: à l'usage de l'analyse, l'improvisation, la composition*: H. Lemoine.
- Bach, C. P. E. (1762). *Versuch über die wahre Art, das Clavier zu spielen* (Vol. 2): Schwickert.
- Bair, J. (2003). Cyclic Patterns in John Coltrane's Melodic Vocabulary as Influenced by Nicolas Slonimsky's Thesaurus of Scales and Melodic Patterns: An Analysis of Selected Improvisations.
- Balzano, G. J. (1980). The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems. *Computer Music Journal*, 4(4), 66-84.
- Baroin, G. (2010). De Newton à Riemann, Graphes et Graphisme: Interactions Mathématico-Musico-Plastiques. *Litter@incognita 3*
- Baroin, G., Ferré, L. (2010). Representation of musical pitch space using graphs, spectrum and hyperspaces, proceedings of 8FCC Combinatorial Conference, Paris (submitted).
- Baroin, G. (2011a). The Planet-4D Model: An Original Hypersymmetric Music Space Based on Graph Theory. *Mathematics and Computation in Music*, 326-329.

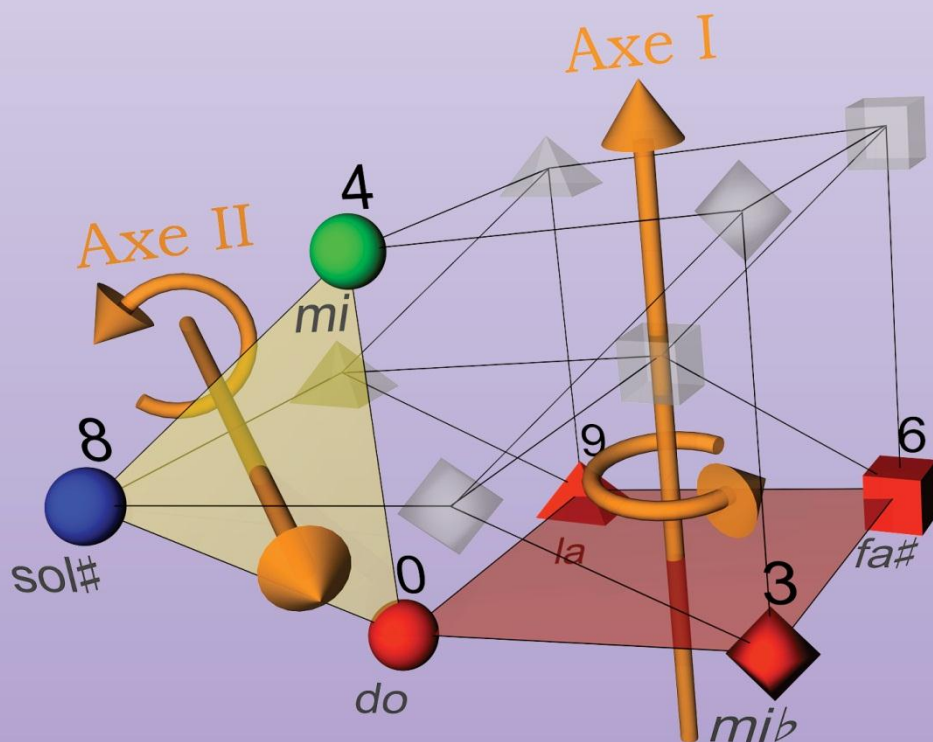
- Baroin, G. (2011b). From Circle to Hyperspheres, when Tonnetze go 4D [Film d'animation], www.Planetes.info.
- Bertin, J. (1977). *La graphique et le traitement graphique de l'information*: Flammarion.
- Boulez, P., Nattiez, J.-J., & Goldman, J. (2005). *Leçons de musique deux décennies d'enseignement au Collège de France (1976-1995) textes réunis et établis par Jean-Jacques Nattiez*: C. Bourgois.
- Broué, M. (2002). Les tonalités musicales vues par un mathématicien. *Le temps des savoirs, Revue de l'Institut Universitaire de France*.
- Buch, E. (2006). *Le cas Schönberg: naissance de l'avant-garde musicale*: Gallimard.
- Burgoyne, J. A., & Saul, L. K. (2005). *Visualization of low-dimensional structure in tonal pitch space*.
- Chew, E. (2000). *Towards a mathematical model of tonality*. Massachusetts Institute of Technology.
- Chouvel, J. M. (2005). Représentation harmonique hexagonale toroïde. *Musimédiane, Revue audiovisuelle et multimédia d'analyse musicale*., 1. www.musimédiane.com.
- Chouvel, J. M. (2006). Analyse musicale. *Sémiologie et cognition des formes temporelles, Collection Art&Sciences de l'Art, L'Harmattan*.
- Chung, F. R. K. (1997). *Spectral graph theory*: Published for the Conference Board of the mathematical sciences by the American Mathematical Society.
- Chung, F. R. K., & Tetali, P. (1998). Isoperimetric inequalities for cartesian products of graphs. *Combinatorics Probability and Computing*, 7(2), 141-148.
- Cohn, R. (1992). The Dramatization of Hypermetric Conflicts in the Scherzo of Beethoven's Ninth Symphony. *19th-century Music*, 15(3), 188-206.
- Cohn, R. (1996). Maximally smooth cycles, hexatonic systems, and the analysis of late-romantic triadic progressions. *Music Analysis*, 15(1), 9-40.
- Cohn, R. (1997). Neo-riemannian operations, parsimonious trichords, and their "Tonnetz" representations. *Journal of Music Theory*, 41(1), 1-66.
- Cohn, R. (1998). Introduction to neo-Riemannian theory: A survey and a historical perspective. *Journal of Music Theory*, 167-180.
- Cohn, R. (2000). Weitzmann's Regions, My Cycles, and Douthett's Dancing Cubes. *Music Theory Spectrum*, 89-103.
- Coxeter, H. S. M. (1989). *Introduction to geometry*: Wiley.
- Cvetkovic, D. M., Doob, M., & Sachs, H. (1980). *Spectra of Graphs—Theory and Applications* (Vol. 1982): Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

- Dauphin, C. (2004). Les grandes méthodes pédagogiques du XXe siècle. In J. J. Nattiez (Ed.), *Musiques, une encyclopédie pour le XXe siècle* (p. 833): Actes sud/Cité de la musique.
- Delorme, C., & Heydemann, M. C. (2002). *Graphes de Cayley*. Paris: L.R.I.
- Demsey, D. (1991). Chromatic Third Relations in the Music of John Coltrane. *Annual Review of Jazz Studies*, 5, 145-180.
- Douthett, J., & Steinbach, P. (1998). Parsimonious graphs: A study in parsimony, contextual transformations, and modes of limited transposition. *Journal of Music Theory*, 241-263.
- Escher, M. C. (1984). *The graphic work of M.C. Escher*: Gramercy Pub. Co.
- Euler, L. (1739). *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*. St. Petersburg.
- Euler, L. (1774). De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis. *Opera Omnia*, 3(1), 568-586.
- Fellows, M. R. (1985). *Encoding graphs in graphs*: University of California, San Diego.
- Fiore, T. (2004). Beethoven and the Torus. [lecture] University of Michigan Undergraduate Math Club.
- Fiore, T., & Noll, T. (2011). Commuting Groups and the Topos of Triads. *Mathematics and Computation in Music*, 69-83.
- Forte, A. (1973). *The structure of atonal music*: Yale University Press.
- Gentilhomme, Y. (1973). Interférences de vocabulaire entre deux sciences, linguistique et mathématique. *Langue française*, 17(1), 44-58.
- Gollin, E. (2009). Combinatorial and Transformational Aspects of Euler's Speculum Musicum. *Mathematics and Computation in Music*, 406-411.
- Hakim, N., & Dufourcet, M. B. (1995). *Guide pratique d'analyse musicale: cours, lexique illustré, tableaux*: Ed. combre.
- Hayden, B. (1982). An Arrangement of Musical Notes for Musical Instruments. *UK patent office*, GB2131592.
- Honti, R. (2007). *Principles of pitch organization in Bartók's Duke Bluebeard's Castle* (Vol. 16): Faculty of Arts, Department of Musicology, University of Helsinki.
- Hook, J. (2006). Exploring musical space. *Science*, 313(5783), 49.
- Hyer, B. (1995). Reimag (in) ing Riemann. *Journal of Music Theory*, 39(1), 101-138.
- Imrich, W., Klavžar, S., & Gorenec, B. (2000). *Product graphs: structure and recognition*: Wiley.
- Janko, P. (1886). Eine neue Klaviatur. *Zeitschrift für Instrumentenbau*. Wien.

- Koh, K., Rogers, D., Teo, H., & Yap, K. (1980). Graceful graphs: some further results and problems. *Congr. Numer*, 29, 559-571.
- Koob, M., & Grellert, M. (2001). Das jüdische Viertel von Worms [Film d'animation]. Darmstadt: Architectura Virtualis Dvd D 2979.
- Krumhansl, C. L., & Kessler, E. J. (1982). Tracing the dynamic changes in perceived tonal organization in a spatial representation of musical keys. *Psychological Review*, 89(4), 334.
- Lara, T. (2001). Matrices Circulantes. *Divulgaciones Matemáticas* 9(1), 85-102.
- Lederman, L. M., & Hill, C. T. (2004). *Symmetry and the beautiful universe*: Prometheus Books.
- Lehman, B. (2005). Bach's extraordinary temperament: our Rosetta Stone--2. *early music*, 33(2), 211-231.
- Lewin, D. (1987). Generalized musical intervals and transformations: Yale University Press (New Haven).
- Ley, J., Ghys, E., & Alvarez, A. (2008). Dimensions : A walk through mathematics! [Film d'animation]. www.dimensions-math.org.
- Mardirossian, A., & Chew, E. (2007). *Visualizing music: Tonal progressions and distributions*.
- Markley, F. L., Cheng, Y., Crassidis, J. L., & Oshman, Y. (2007). Averaging quaternions. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 30(4), 1193.
- Mazzola, G. (2002). *The topos of music*: Birkhäuser Basel.
- Mazzola, G. (2005). Le Principe Anthropique en Musique, Le «développement de l'identité» dans le contrepoint de Johann Joseph Fux ENS Paris.
- Messiaen, O. (1944). *Technique de mon langage musical* (Vol. 1): A. Leduc.
- Muzzolini, D. (1995). Musical Modulation by Symmetries. *Journal of Music Theory*, 311-327.
- Noether, E. (1918). *Invariante Variationsprobleme*, Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pp235-257.
- Noll, T. (2001). Geometry of chords. *Electronic Bulletin of the Sociedad Matematica Mexicana*, 1.
- Pêcher, A. (2008). Des multiples facettes des graphes circulants.
- Pêcher, A., & Wagler, A. K. (2006). Almost all webs are not rank-perfect. *Mathematical programming*, 105(2), 311-328.
- Purwins, H. (2005). *Profiles of Pitch Classes Circularity of Relative Pitch and Key-Experiments, Models, Computational Music Analysis, and Perspectives*. Dr Rer Nat, TU, Berlin.
- Quilliot, A. (1983). *Homomorphismes, points fixes, rétractions et jeux de poursuite dans les graphes*. PhD thesis, Paris.

- Risset, J. C. (1986). Pitch and rhythm paradoxes: Comments on "Auditory paradox based on fractal waveform". *The Journal of the Acoustical Society of America*, 80, 961.
- Rivolta, D. (1998). Mémoire sur les transpositions limitées *Intemporel*, Société Nationale de Musique. (Vol. 25). mediatheque.ircam.fr/Hotes/Snm/Itpr25Riv.html.
- Roberts, S. (2006). *King of infinite space: Donald Coxeter, the man who saved geometry*: Anansi.
- Rocard, J. M. (1992). *Newton versus relativity*: Vantage Press.
- Sabidussi, G. (1959). Graph multiplication. *Mathematische Zeitschrift*, 72(1), 446-457.
- Sanders, R. S. (2002). Products of Circulant graphs are Metacirculant. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 85(2), 197-206.
- Saussure, F., & Engler, R. (1989). *Cours de linguistique générale*: Harrassowitz.
- Schelling, F. W. J., & Michalewski, A. (2005). *Le Timée de Platon (traduction)*: Presses Universitaires du Septentrion.
- Schoenberg, A., & Stein, L. (1969). *Structural functions of harmony*: WW Norton & Company.
- Shell, B. (2001). Donald H.S.M Coxeter, "Le plus grand géomètre classique du 20ème siècle" Société de Recherche "Great Canadian Scientists". www.science.ca/scientists/scientistprofile.php?pid=5.
- Shepard, R. N. (1964). Circularity in Judgments of Relative Pitch. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 36, 2346.
- Tymoczko, D. (2006). The geometry of musical chords. *Science*, 313(5783), 72.
- Tymoczko, D. (2011). *A Geometry of Music. Oxford Studies in Music Theory*. Oxford University Press, Oxford.
- Weber, G. (1832). *Versuch einer geordneten Theorie der Tonsetzkunst*: B. Schott's Söhne.
- Weitzmann, K. F. (1853). *Der übermässige Dreiklang*: Verlag der T. Trautweischen Buch-und Musikalienhandlung (J. Guttentag).
- Weitzmann, K. F., & Bowman, E. M. (1879). *Bowman's-Weitzman's manual of musical theory: A concise, comprehensive and practical text-book on the science of music*: W.A. Pond & co.
- West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (Vol. 1): Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.
- White, M. (1999). *Isaac Newton: the last sorcerer*: Da Capo Press.
- Wicki, K. (1896). Tastatur für musikinstrumente. *Swiss patent*, 13329.
- Zacharias, S., & Velichova, D. (2000). Projection from 4D to 3D. *Journal for Geometry and Graphics*, 4(1), 55-69.

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

6.1. CADRE DES EXPERIENCES

Les expériences sont en annexe de la thèse, elles relatent l'historique de la recherche. Nous montrons quelques applications du modèle *Planet* en utilisation statique ou dynamique, en relation ou non avec le logiciel pour obtenir de l'interactivité. Nous décrirons aussi les expériences opérant avec les mêmes principes ayant d'autres modèles de relations harmoniques comme base de travail. Le modèle utilisé de façon statique peut être une source d'inspiration ou de contraintes pour le compositeur qui, à partir d'un chemin de modulations choisi, créera un arrangement en suivant l'harmonie. Il est possible de respecter strictement une règle imposée, en n'utilisant, par exemple, que des accords mineurs, ou a contrario, de transgresser la règle fixée lors de la composition. Pierre Boulez explique dans ses "leçons de musiques" (Boulez, Nattiez, & Goldman, 2005), qu'il se donne des règles pour le plaisir de les transgresser. Ainsi, les contraintes qu'il s'est données incitent elles son imagination à prendre des chemins auxquels il n'aurait pas pensé sans elles. L'avantage de l'utilisation statique du modèle est de pouvoir prendre tout le temps nécessaire au travail de la composition, de l'orchestration, du travail des sons et de l'acoustique. Se séparer complètement de l'ordinateur permet de produire la musique de façon traditionnelle.

Lorsque le modèle est utilisé de façon interactive, le logiciel montre un parcours de modulations obéissant aux règles choisies dans le programme. Le parcours peut suivre un chemin le long du modèle *Planet* ou d'un autre modèle inclus dans le logiciel. Ce parcours peut être généré selon plusieurs modes aléatoires, par l'ordinateur, en temps réel, il peut être proposé par un professeur à son élève, ou choisi en direct par l'interprète.

Le logiciel peut être employé pour montrer seulement un chemin harmonique, sans générer de musique. Dans ce cas, tous les sons seront produits par les musiciens. En utilisant la fonction arrangeur du logiciel, l'ordinateur génère un accompagnement sonore sur lequel le ou les interprètes peuvent chanter ou jouer d'un instrument. L'accompagnement peut être minimal, par exemple un "tic tac" de métronome, ou plus complet afin de simuler une orchestration²³¹ à la façon des claviers arrangeurs.

6.2. EXPERIENCES NON INTERACTIVES

Nous appelons "non interactives", les expériences où la grille d'accords est prédéfinie, le chemin le long du modèle ayant été composé par avance. La grille peut être utilisée pour une composition ou une improvisation. Cela par opposition aux cas où le chemin est décidé en direct par l'artiste, par un enseignant ou par l'ordinateur.

²³¹ L'orchestration est appelée parfois accompagnement automatique.

6.2.1. Improvisations suivant le modèle tournant *Planet-3D*

Dans ce paragraphe, nous allons décrire le premier modèle utilisé et en exposer ses limites. Ce modèle, créé en 2001, n'est évoqué que pour des raisons esthétiques et historiques. Il a été utilisé lors des premières démonstrations avec d'autres musiciens dans un cadre privé, et pour la première présentation du système *Planet* à l'université de Toulouse en 2006.

Dans ce cadre, le modèle *Planet* est représenté en 3D, en mouvement, dans une vidéo affichée sur l'écran de l'ordinateur portable, ou projetée sur écran. L'ordinateur présente alors une partition tournante où est indiqué l'accord actuel que l'improvisateur soit suivre. La séquence d'accords (voir figure 6-1 ci-dessous) a été dessinée au préalable sur papier.

D-	F-	A-	C-	E-	G-	B ^b -
----	----	----	----	----	----	------------------

Figure 6-1 : La grille de *Walk*

La construction de l'animation s'est faite en positionnant manuellement le modèle en fonction du temps dans le logiciel d'image de synthèse. Le modèle est dessiné en 3D seulement, la projection 4D vers 3D ne change pas, c'est-à-dire que comme la sculpture 3D représentée figure 6-10, il ne se déforme pas. L'impression de symétrie géométrique est par conséquent bien modeste : la position du "vaisseau", petite sphère symbolisant l'accord actuel sur le modèle tournant, ne peut pas rester au centre de l'écran si le modèle tourne seulement sur lui-même. Ceci est compensé par des trucages infographiques afin de rendre moins perceptible pour le profane l'impression de "non-symétrie". Comme avec la technique où un projecteur blanc puissant (la "poursuite") suit un artiste sur scène, nous utilisons un spot très lumineux et mobile, dirigé sur le "vaisseau" afin de le souligner graphiquement. Nous utilisons de plus des effets d'accélération et de ralenti lors des rotations afin de simuler un départ et une arrivée en douceur sur chaque "planète". Ceci a pour effet de marquer progressivement le chemin et de laisser le temps au spectateur de percevoir cette position. L'illustration suivante (figure 6-2) présente deux images extraites de la vidéo.

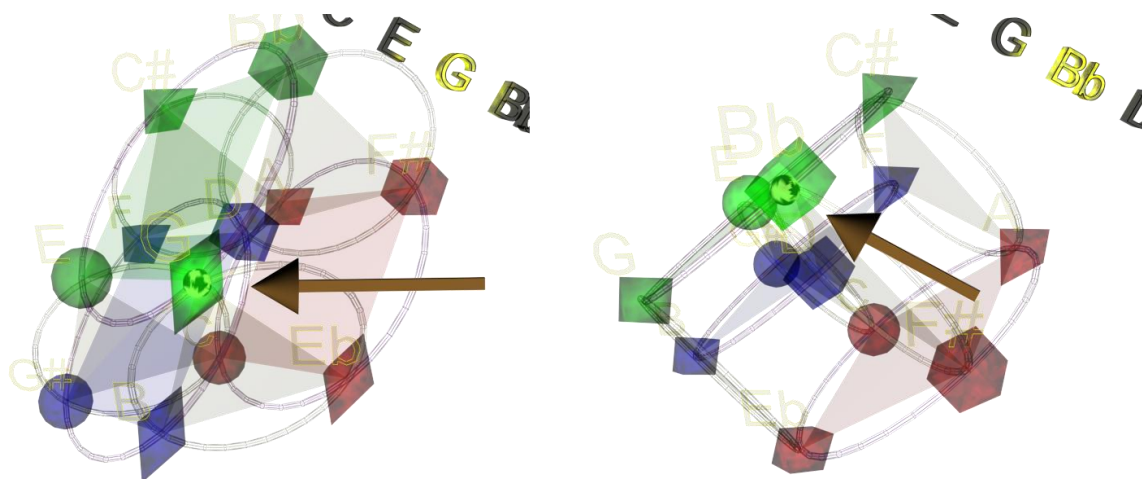


Figure 6-2 : Le modèle 3D tournant et le ruban 2D

Bien que la symétrie géométrique ne puisse être totale, comme c'est le cas pour les animations réalisées en 4D pure (*Planet-4D* et *Hypersphère des Accords*), les astuces infographiques sont efficaces. Afin de prévoir le chemin entre accords, un ruban défilant au coin supérieur gauche de l'écran affiche la liste des accords. L'accord actuel, au centre du ruban, est souligné visuellement par un spot fixe. Le musicien, qui improvise ou travaille ses gammes en suivant le parcours proposé à l'écran, utilise ce ruban pour connaître les prochains accords. Cet artifice compense le manque de symétrie d'un modèle 3D. Dans le modèle 3D, où la projection est fixée, la position de chaque point n'est pas géométriquement équivalente. Lors de la mise en mouvement du modèle, le musicien a du mal à deviner le prochain accord s'il se prête au jeu et n'a pas appris par cœur la suite prédéfinie. L'animation montre surtout l'évolution de l'harmonie en fonction du temps, ce qui est le but de l'expérience.

6.2.1.1. Improvisation au piano

Lors de cette improvisation, la règle a été d'utiliser seulement des accords mineurs dont la fondamentale est un sommet du modèle. Il eût été possible d'utiliser d'autres règles, comme par exemple, le choix de respecter seulement la fondamentale ou, d'utiliser d'autres types d'accords. La reproduction d'une improvisation enregistrée au piano est disponible sur le support informatique joint²³². La vidéo a été reconstruite en resynchronisant les images à l'improvisation enregistrée.

La façon de jouer le piano dans la vidéo jointe est assez simple afin de bien laisser sentir les modulations, mais elle peut être complexifiée. Le tempo de la musique est légèrement variable, ce qui renforce le côté humain de la musique. Le modèle géométrique tourne de façon régulière. Les variations de tempo pouvant conduire à une désynchronisation sont compensées en moyenne, car l'improvisateur s'adapte à l'image en avançant légèrement ou rattrapant le modèle.

²³² Voir Clip E 1 Walk , p. 283.

La complexité du jeu et la richesse de l'harmonie utilisés pour cette pièce sont, bien entendu laissés au gré de l'improvisateur.

6.2.1.2. Improvisation en groupe

La vidéo *Walk* avait été testée jadis, en 2002, avec le groupe de flûtistes "Parler Flûtes" dont je faisais partie. "Parler flûtes" était composé de flûtes uniquement : de Pan, à Bec, ou traversières. Selon les configurations, nous étions de cinq à dix musiciens. Notre groupe s'est produit plusieurs fois au club de Jazz "Le Mandala" à Toulouse, et m'a permis de faire une des premières expériences musicales avec le modèle *Planet*. Nous avons improvisé le long du modèle projeté sur écran chez moi. La règle était d'improviser selon des accords mineurs, le bassiste jouant de préférence la note fondamentale afin de mieux marquer l'harmonie, ce type de modulations enchaînées étant plutôt étrange pour les musiciens. Les premières minutes du test furent assez chaotiques, car chacun cherchait sa place et devait s'habituer à la partition en mouvement. Ce modèle en 3D qui tourne est trop difficile à suivre pour celui qui le découvre et ne connaît pas la grille par avance. Afin d'obtenir un résultat musical plus pertinent, j'ai dirigé le groupe en indiquant en direct le prochain accord aux improvisateurs. Je n'ai, hélas, pas de trace sonore de l'enregistrement.

6.2.1.3. En conclusion

Ce modèle tournant 3D qui fut utilisé pour les premières expériences contient toute la symbolique et les caractéristiques du système *Planet*, mais il est mal adapté à qui le découvre et même à qui le connaît. Comme il n'est pas symétrique, il est quasiment impossible de prévoir le chemin vers le prochain accord si la grille n'est pas présentée de façon plus traditionnelle en complément. L'improvisateur se concentre en fait sur la partie 2D de la vidéo : le ruban. Le modèle tournant n'est là que pour illustrer aux spectateurs, de façon esthétique, le système et le parcours de modulations.

6.2.2. Production Techno enregistrée

Une production non interactive "Péplum feat le Baron" a été conçue indépendamment de l'expérience décrite au chapitre 6.4.2, en programmant au préalable une suite d'accords selon un chemin issu du modèle *Planet* dans le séquenceur habituel du musicien. La modulation étant considérée comme un effet pour le créateur, celui-ci en a déterminé les occurrences au cours de la composition. Dès que le musicien avait besoin de cet effet, ou qu'il sentait qu'une modulation était pertinente, j'ai appliqué manuellement la modulation en réécrivant la partie mélodique dans le séquenceur.

Concernant la Techno, le musicien étant culturellement attiré par la "performance live", il peut aussi se réserver une partie à piloter lui-même : la gestion des filtres. Les filtres utilisés dans ce cas étaient des filtres analogiques de type "passe-haut" et "passe-bas", ils permettent de faire

varier le timbre d'un instrument en coupant les fréquences les plus hautes ou les plus basses. Dans le cas présent, la séquence a été jouée par l'ordinateur, le compositeur l'a mixée en direct en utilisant sa table, ses filtres et ses effets familiers.

Les résultats sont techniquement très satisfaisants car tout a été généré dans l'environnement habituel du musicien, Le modèle *Planet* a apporté l'idée des modulations qui donnent un effet intéressant et généralement mal connu en techno. Le fait que ces modulations soient symétriques renforce l'effet de progression sans avancer et participe sans doute à l'effet de transe recherché. L'enregistrement est disponible sous la référence : Clip E 2 Akufen, p. 297.

6.2.3. Musique "classique" et chemin hamiltonien

Cette expérience non interactive est détaillée dans le corps de la thèse au chapitre 3.5.4, consacré à l'analyse.

6.2.4. Grille utilisant le modèle *Planet* comme séries de tonalités

Dans ce paragraphe, nous ne considérons plus les sommets du modèle comme de simples accords ou gammes, mais comme des enchaînements ou séries d'accords. Passer par un sommet signifiera jouer une séquence d'accords ayant son propre discours interne et qui sera modulée en fonction du sommet choisi. Ces séquences peuvent être autonomes et indépendantes du modèle, celui-ci servant seulement à proposer des chemins de modulations vers la nouvelle séquence.

Puisque nous avons défini les nœuds du graphe comme des tonalités et que dans chacune d'elles nous utilisons des accords différents, il s'agit bien de modulations et non de simples parcours d'accords.

Prenons, par exemple une suite d'accords tonals {E-, D, C, D}/E. Ils correspondent aux degrés notés I-, VII, VI, VII de *mi mineur* avec basse en *mi*. Si nous modulons la même suite à la tierce en suivant le modèle, par exemple vers *sol*, nous obtenons {G-, F, E^b, F}/G. Nous avons choisi intentionnellement pour cette première modulation de terminer la série de degrés de *mi* par D, qui est la dominante de G-. Le dernier accord joué sur le premier nœud du graphe possède une relation hiérarchique avec le premier accord du nœud suivant. La basse suit un chemin modulant le long du modèle, nous pouvons jouer avec les degrés musicaux (tonals) avant de moduler vers le prochain sommet afin de chercher des passages pertinents, comme par exemple :

$$\frac{E- \ D \ C \ D}{E} \quad \text{Relation hiérarchique tonale} \rightarrow \quad \frac{G- \ F \ E^b \ F}{G}.$$

Modulation de type *Planet* →

Rappelons que ce mécanisme n'a, bien sûr, pas été inventé grâce au modèle *Planet*. Il est très bien connu et utilisé pour ces modulations et d'autres encore. Le système *Planet* utilisé dans ce cas apporte une contrainte compositionnelle supplémentaire, et la symétrie des modulations donne un effet particulier. Avec ce principe, le musicien peut imaginer des passages qu'il n'aurait pas utilisés dans d'autres

circonstances. Cela vaut pour des compositeurs amateurs ou apprentis, les musiciens expérimentés maîtrisant déjà ces techniques. Mais comme cité plus haut au chapitre 6.1, créer des règles même pour les enfreindre apporte dans tous les cas matière à réflexion et ouvre l'esprit du créateur. La grille de *New Planet*, reproduite dans la figure 6-3 ci-dessous, utilise ce principe en plusieurs endroits. Le chemin commence en *mi*, dont le dernier accord est A^7 qui est la double quinte de G^- , ensuite le dernier accord de *sol* est F qui est la quinte de B^b .

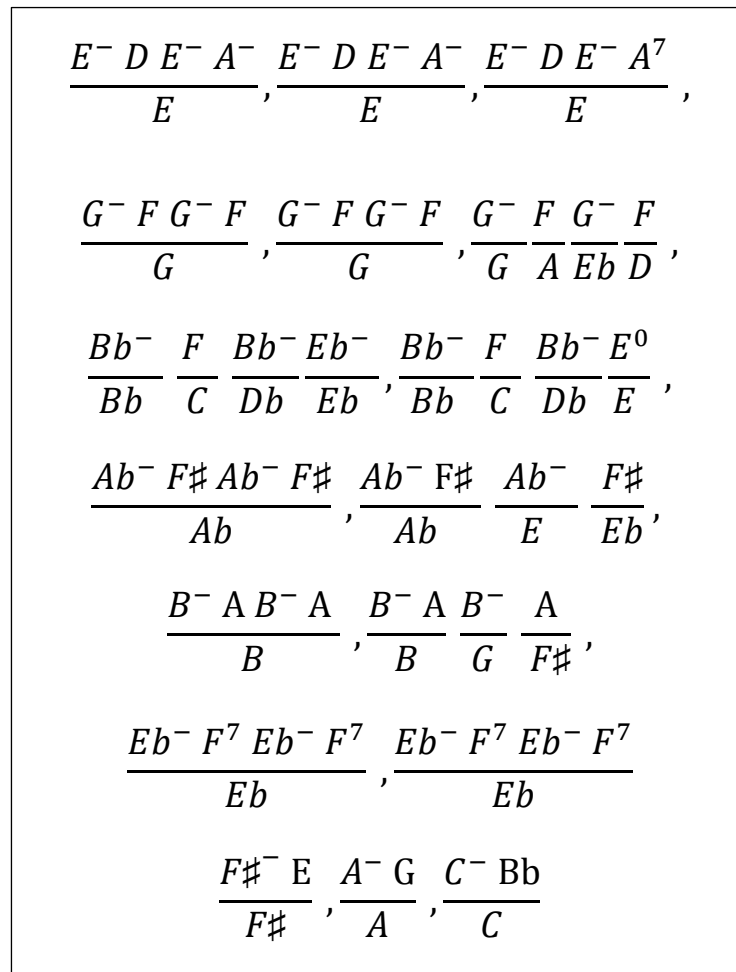


Figure 6-3 : La grille de *NewPlanet*

Le chemin parcouru le long des sommets est : E , G , B^b , Ab , B , E^b , F^\sharp , C , E .

Nous remarquons que toutes les modulations, ou passages d'accords, respectent le modèle *Planet*, sauf pour le passage de B^b vers A^b . Nous avons utilisé la même grille composée avec les principes décrits ci-dessus pour réaliser deux enregistrements différents : une improvisation au piano et une création électronique.

6.2.4.1. Version Piano

Pour cette version, le pianiste n'a que la partition imprimée sur papier. Le morceau est semi-improvisé, car seule la grille est écrite. La musique produite n'a pas de prétention savante, le but de l'exercice étant de tester des contraintes compositionnelles et de dépasser le cadre initial où chaque point symbolisait un accord. Le résultat paraissant satisfaisant, la musique a ensuite été reprise comme illustration pour un documentaire²³³.

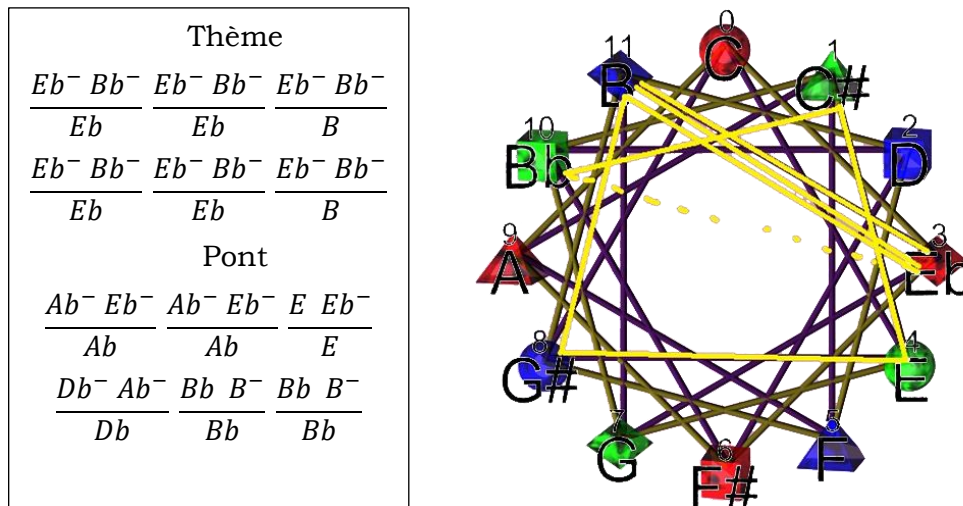
6.2.4.2. Version Electronique

Nous avons utilisé la même grille que précédemment (voir figure 6-3) avec des synthétiseurs et des instruments électroniques. L'arrangement choisi se rapproche d'un style "variété". La vidéo associée a été réalisée *a posteriori* et ne présente qu'un intérêt graphique. Elle est trop chaotique pour être intelligible sans bien connaître le modèle. Elle n'apporte rien à la compréhension du système et n'ajoute que confusion chez la plupart des spectateurs que j'ai interrogés. Réalisée au tout début de cette étude, elle figure sur le support informatique joint en annexe pour mémoire (Clip E 3 *New Planet*, p. 297).

6.2.5. Compositions respectant moins strictement le modèle

Dans ce paragraphe, nous ne considérons plus les sommets du modèle comme de simples accords ou gammes ou séquences d'accords, mais comme des points de repère pouvant avoir un rapport plus ou moins précis avec la composition. Ici, la grille est encore pré-calculée et sera utilisée pour une composition ou pour une improvisation. Elle est toujours inspirée par le modèle, mais la règle de création est moins stricte : les nœuds du graphe ne symbolisent que la basse. Le but de l'expérience est d'essayer de créer un morceau où l'on ne devine plus la sous-jacence du modèle *Planet* dans la composition. Il doit rester comme une impression de symétrie tout en montrant clairement des fonctions tonales hiérarchiques lors de la progression. Nous avons donc choisi de créer une chanson comportant couplet et refrain, renforçant ainsi l'impression qu'elle ne résulte pas du modèle. A la fin de la grille, la règle qui consiste à faire suivre à la basse un chemin le long du modèle n'est pas respectée, afin de créer l'effet de relance par une cadence parfaite (V,I). Nous avons utilisé B-/B^b qui s'interprète comme B^b altéré, accord résolvant sur E^b -.

²³³ "L'œuvre sans fin" film documentaire de Charles Giuliani, présentée au centre Culturel Bellegarde de Toulouse du 10 au 30 juin 2010.

Figure 6-4 : La grille et la progression harmonique de *Ellipsong*

L'image ci-dessus (figure 6-4) montre, à gauche, la grille utilisée et, à droite, en jaune, le chemin suivi par la basse. Le pointillé représente le passage final où la progression de la basse ne respecte pas le modèle. Nous avons travaillé avec le parolier et poète Herr-Z et créé deux versions de *Ellipsong* : un Rap poétique et une ballade au piano. Tous les instruments sont synthétiques, et le tempo ne varie pas. Cette version qui sonne un peu "rap" est d'un style différent de celui, plus lyrique, habituel au chanteur de chansons à textes. L'enregistrement de la voix a été effectué a posteriori, puis l'arrangement retravaillé. Quant à la version "live", elle a été enregistrée en direct, le pianiste accompagnant le chanteur qui, en donnant le plus d'importance à son texte, guidait la musique. Il en est ressorti un meilleur "feeling" pour le chanteur, car la chanson à texte s'interprète mieux lorsque la musique est jouée par deux humains.

Bien que les chansons aient pu être imaginées sans le modèle *Planet*, et que celui-ci ait été utilisé dans le but de se faire oublier, il en ressort une ambiance particulière. La musique a inspiré le poète qui a su créer une atmosphère emplies d'émotion. Les enregistrements ont été réalisés avec du matériel amateur, ce qui permet une écoute correcte sans prétention. Voir les enregistrements audio sur le support multimédia : Clip E 4 *Ellipsong*, p. 297.

6.2.6. Test de superposition de chemins

Double Jeu est une pièce pour piano inspirée par le modèle *Planet*, qui fut imaginée initialement pour montrer les effets de la séparation harmonique des deux mains du pianiste. Au départ du morceau, les deux mains jouent dans la même tonalité. Puis elles se séparent, suivant chacune un parcours harmonique différent le long du modèle *Planet*. Le morceau est assez lent et les accords et arpèges utilisés sont pauvres afin de laisser sentir la tension harmonique présente entre les deux mains. En effet, plus les accords sont riches (grand nombre de notes), plus ils ont de chances d'avoir des notes communes. Nous avons utilisé des accords à trois sons (tonique, tierce et quinte), ce qui est le minimum, pour qu'un

accord crée une impression de couleur harmonique. L'effet de séparation des voies est plus impressionnant lorsque celles-ci sont pauvres.

Tableau 6-1 : Table des distances pour *Double Jeu*

Voix 1	Accord	C-	E-	C [#] -	B ^b -	D-	B ^b -	C [#] -	E-	C-
	N [#]	-3	1	4	7	-1	7	4	1	-3
Voix 2	Accord	C-	A-	C-	A ^b -	B-	E ^b -	C-	A-	C-
	N [#]	-3	0	-3	5	2	6	-3	0	-3
Distance		0	1	7	2	3	1	7	1	0

Le tableau 6-1 précédent montre les chemins suivis par chacune des deux voix. Les lignes N[#] indiquent le nombre de dièses à la clef pour la tonalité sélectionnée. Un chiffre négatif indique par conséquent des bémols, c'est ainsi que C- possède 3^b ou -3[#]. Nous utilisons de plus l'enharmonie ($G^{\#} = A^b$) afin de calculer la différence d'altérations entre les deux tonalités. La distance est calculée comme étant la plus courte : c'est-à-dire la valeur absolue de la différence du nombre de dièses à la clef modulo 12.

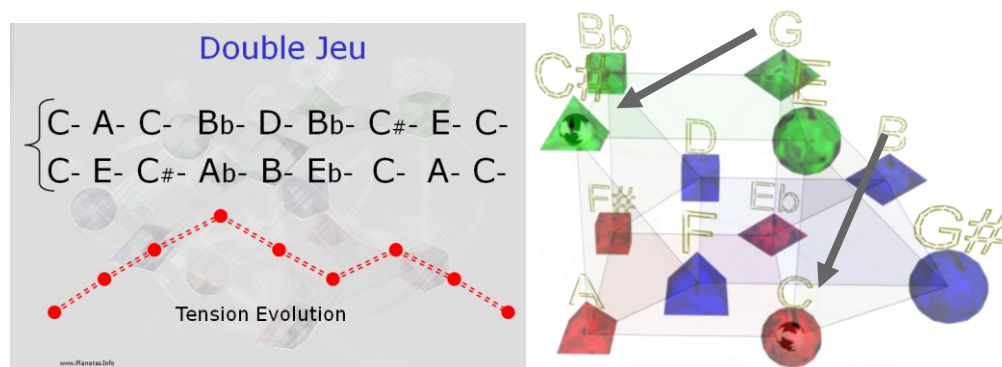


Figure 6-5 : La partition et un extrait vidéo de *Double-jeu*

La partition présentée ci-dessus (figure 6-5) représente les accords qui seront joués ainsi que la tension harmonique qui résulte de la séparation des voies. La tension a été calculée ici selon l'effet produit pour une oreille habituée à la musique conventionnelle. À droite, la vidéo associée à *Double-jeu* montre deux sphères qui matérialisent la position de l'harmonie pour chacune des mains. Au départ, les deux voies sont dans la même tonalité. Elles s'éloignent ensuite harmoniquement, ainsi que physiquement sur le modèle. L'image et le son sont synchrones, le musicien ne lit pas les accords avec le modèle 3D tournant, mais sur la partition papier, et se synchronise toutefois avec la vidéo en remarquant les mouvements des sphères représentant les chemins de chaque main. Nous avons utilisé des effets de ralenti à l'arrivée des sphères sur les accords et d'accélération à

leur départ afin d'adoucir le mouvement et de bien laisser le temps au spectateur de repérer les positions sur le modèle.

L'expérience donne un résultat pertinent dans ce cas d'accords simples, joués lentement. L'impression de symétrie visuelle est faible avec ce modèle 3D tournant, d'autre part, un modèle 4D symétrique ne pourrait pas matérialiser plusieurs positions simultanément. Il faudrait une vidéo par voix. La représentation 3D ne tourne que selon l'axe vertical, cela est le meilleur compromis pour permettre au spectateur de suivre les différentes voix de façon équitable.



Figure 6-6 : Une image extraite d'*Ombres Chinoises*

Cette pièce a été ensuite utilisée pour illustrer de façon sonore l'œuvre *Ombre Chinoise*²³⁴ du Peintre Charles Giuliani²³⁵ (voir figure 6-6, ci-dessus), reproduite avec l'aimable autorisation de l'auteur. Dans *Ombre chinoise*, l'image est composée d'ombres des visiteurs, projetées sur un fond coloré. Elle symbolise selon l'artiste "*les deux faces de l'homme*". La peinture évolutive numérique montre des superpositions d'ombres, la musique, une superposition d'harmonies.

6.2.6.1. En conclusion

Le fait de suivre deux voix différentes avec deux mains au piano procure une sensation assez nouvelle. Il doit être possible d'utiliser le même principe avec plus de voix et une autre instrumentation. Par exemple, plusieurs solistes suivant chacun une sphère sur le modèle, en s'aidant d'une partition papier pour anticiper les déplacements. On peut aussi imaginer une expérience interactive dans laquelle un chef d'orchestre piloterait plusieurs représentations simultanément, chaque écran montrant une position différente le modèle 4D symétrique qui serait suivie par un groupe de musiciens improvisateurs.

²³⁴ "Ombre Chinoise" est une installation interactive de Charles Giuliani, présentée en première à la cité des sciences de La Villette en mai 2006.

²³⁵ Site de l'artiste : www.giuliani.com

6.2.7. Essai avec règles sérielles

Afin de traduire musicalement le concept de *graphe de graphes*, nous prenons une série dodécaphonique, premier graphe, que nous modulons le long d'un chemin hamiltonien dans le *Graphe Planet*. Nous avons confié la partition à Jean Luc Amestoy qui l'a jouée au piano. L'artiste l'a ensuite interprétée sous forme de canon à l'accordéon. La partition, ainsi que les deux enregistrements sonores, sont stockés sur le support informatique joint. Voir Clip E 6 Serial Case, p. 297.

6.3. EXPERIENCES AVEC LE MODELE *PLANET* INTERACTIF

Nous appelons "expériences interactives" les cas où le modèle est piloté par un humain ou par une machine. Les rotations du modèle sont contrôlées et calculées par un logiciel. La représentation étant, dans ce cas, une vraie projection 4D, il peut indiquer de façon centrale à l'écran une position sur le graphe, un sommet symbolisant, par exemple, un accord ou une gamme à travailler. La prochaine position est atteinte de façon interactive par le musicien lui-même manipulant le logiciel ou peut être décidée par un enseignant ou "chef d'orchestre" aux commandes de l'ordinateur ou encore définie selon des règles combinant hasard et symétrie, programmées dans le calculateur. Nous avons regroupé dans ce chapitre les interactivités décidées par le musicien et celles qui lui sont proposées par un tiers.

6.3.1. Serious game et apprentissage du Jazz

Marco Toledo est professeur de Jazz, et chef d'orchestre. Spécialisé en pédagogie, il s'est intéressé aux aspects éducatifs concrets possibles avec le modèle *Planet* et le logiciel existant. Appliqué à l'apprentissage du Jazz, le logiciel interactif devient à la fois sérieux et ludique. Le "Serious game"²³⁶ est destiné plus particulièrement à l'entraînement de l'improvisation ou au travail des gammes. Le logiciel comporte une série de jeux vidéo interactifs proposant des parcours d'improvisation que suivra le musicien ou le groupe apprenant. Il y a deux modalités d'utilisation : dans le premier cas, l'utilisateur se déplace dans l'harmonie avec un joystick, un volant, un pédalier ou tout autre capteur périphérique paramétré pour l'ordinateur. Dans le second cas, c'est l'ordinateur qui choisira un parcours selon un hasard contrôlé. Dans les deux configurations, l'ordinateur génère un accompagnement sonore et montre visuellement la gamme suivante proposée.

Il est possible de choisir le style musical à travailler (Rock, *Blues*, Jazz,...), bien que nous ne l'ayons testé que pour le Jazz. La pertinence du système est plus grande pour les musiques improvisées, et surtout pour le

²³⁶ Nous l'appelons "Serious game" en attendant que l'état français ou que nos amis québécois ne trouvent un terme plus adéquat que "Jeu Sérieux".

Jazz, pour lequel le musicien est amené vraiment à jouer dans toutes les gammes. Bien que le *Blues* demande aussi un talent d'improvisation incontestable, il est très rare de jouer en groupe dans toutes les tonalités.

Les méthodes d'apprentissage utilisées pour l'improvisation consistent habituellement à progresser dans la maîtrise des échelles et la fluidité des modulations selon chaque style, chose parfois difficile à transmettre avec les outils conventionnels non visuels (écoute, répétition, partition, ...). Dans le cadre traditionnel de l'apprentissage de l'improvisation, le musicien travaille dans un premier temps les gammes et leurs enchaînements. Dans un deuxième temps, l'apprentissage dépend d'autres musiciens, voire d'un professeur qui accompagne, organise les gammes et accords à suivre selon le style recherché.

6.3.1.1. Ce que le jeu vidéo apporte

La visualisation des accords

La visualisation des accords et de leurs relations offre un nouvel univers d'apprentissage séduisant pour le musicien.

Les compétences sont transmises à travers des stimulations récurrentes du système sensoriel et musculaire, suscitant l'intérêt ludique de l'élève. C'est ce qu'on appelle, en science de l'éducation, une méthode active (Dauphin, 2004) : le musicien pourra lui-même établir les relations, contrôler la progression de la musique, et passer plus de temps sur une gamme qu'il juge plus difficile. Dans ce cas, le pilotage du logiciel peut se faire par une interface contrôlée avec le pied.

L'utilisation du hasard

Outre la possibilité de travailler seul, de contrôler et d'évaluer ses progrès, l'utilisation d'un hasard paramétrable provoque un effet de surprise renforçant celui ressenti réellement lors d'improvisations en groupe (Jam Session). La surprise peut ajouter un intérêt ludique au travail pour le musicien. En faisant ensuite varier le tempo, donc la fréquence d'enchaînement des accords, le musicien peut alors tester sa capacité de réaction et trouver sa limite maximum donc contrôler ses progrès. Cela a été expérimenté au chapitre 6.3.3 avec un pianiste de Jazz.

Le chemin hamiltonien

Le fait de travailler ses gammes dans un ordre aléatoire variant pour chaque cycle de 12 gammes évite de prendre des habitudes. Les gammes se travaillent en général selon un ordre préétabli, souvent écrit, qui est donc déjà connu par l'apprenant. Dans notre cas, l'ordinateur tire un chemin hamiltonien au hasard parmi tous les chemins possibles et montre le parcours à suivre. Il est quasiment improbable pour le musicien de prévoir la suite des accords ou de calculer les possibilités restantes tout en se concentrant sur son travail.

La symétrie

Les enchaînements étant symétriques (sans relation hiérarchique), on évite alors certains passages faciles ou trop classiques entre chaque tonalité travaillée et ainsi de penser par avance à la prochaine gamme. Dans le cas du travail de l'improvisation, la symétrie, qui abolit les relations hiérarchiques entre tonalités, évite au musicien de choisir plus ou moins consciemment des points de passage entre les deux gammes qui peuvent devenir, à la longue, des habitudes. Les points de passage sont, avec cette méthode, moins évidents à trouver et à systématiser qu'avec les procédés plus usuels où le musicien travaille ses gammes en les enchaînant par intervalles constants. Ceci doit être utilisé en complément du travail classique par demi-tons ou par quintes, qui a toute sa place car il permet des enchaînements qui seront utiles lors de l'improvisation.

Les enchaînements

Pour un musicien plus expérimenté, il est intéressant de considérer chaque position proposée par le logiciel comme une séquence d'accords à travailler dans chaque tonalité. Prenons par exemple un enchaînement dit (II,V,I), dont le principe est extrêmement répandu, tant dans le Jazz que dans la musique dite classique, mais ce vocabulaire est spécifique au Jazz. L'intérêt de connaître cette succession d'accords dans toutes les tonalités est essentiel afin de savoir l'utiliser avant de la rencontrer dans le contexte des morceaux. Ces trois chiffres romains symbolisent une succession d'accords à partir des deuxième, puis cinquième et premier degrés d'une gamme majeure ou mineure.

En associant hasard, chemin passant par les douze sommets, interactivité et visualisation, le jeu apporte donc, en complément des méthodes traditionnelles, une nouveauté intéressante pour le travail du Jazz.

6.3.1.2. Les différents jeux

Le logiciel propose plusieurs scénarii et modes de fonctionnement avec lesquels il est possible de participer à divers jeux éducatifs. Voici quelques exemples, le lecteur et l'utilisateur du logiciel pourront sans peine en inventer d'autres.

La découverte de l'harmonie

Le joueur se déplace dans un modèle harmonique prédéfini (par exemple le *Blues*), le visualise et entend les modulations. Le joystick sert à passer d'un accord à l'autre. Selon le modèle utilisé, il y a plus ou moins de possibilités de passage. Le modèle *Planet* montre pour chaque point quatre chemins. L'*Hypersphère des Accords*²³⁷ laisse entendre l'effet de la conduite parcimonieuse des voix. Le simple *Blues* ou *Rock* à trois accords, qui propose deux directions en chaque point, s'avère très ludique et à la portée de tous. Pour des musiciens devenus expérimentés, c'est l'esthétique nouvelle de la représentation qui justifie l'intérêt de ce jeu.

²³⁷ C'est un projet, le logiciel n'a pas encore intégré l'*Hypersphère des Accords*.

"Follow me"

L'ordinateur génère un parcours de travail hamiltonien aléatoirement parmi les 252 possibles (voir chapitre 2.2.3). Celui-ci s'affichera à l'écran pas à pas et l'accompagnement sera joué par l'ordinateur, l'orchestration étant plus ou moins riche selon le besoin du musicien. Le joueur ou le groupe de musiciens suivant visuellement le parcours devra répondre de façon musicale. Il est souhaitable d'utiliser, pour l'accompagnement, au moins la fonction métronome afin de rester synchrone avec le modèle.

"Follow me in the dark"

Comme pour le jeu précédent, "Follow me", l'ordinateur génère un parcours, mais n'affiche pas les accords. Il produit un accompagnement automatique que le musicien doit suivre à l'oreille. La grille générée par la machine peut être dans ce cas assez difficile à suivre, selon l'entraînement et le niveau d'oreille du musicien.

"Follow the Guide"

Comme précédemment, mais c'est le professeur qui dirige le parcours afin d'adapter plus précisément la difficulté au niveau des musiciens. L'enseignant peut choisir de montrer ou non la grille. Le professeur peut utiliser une grille connue, ce qui revient à montrer une partition graphique.

La dictée

Alors que l'ordinateur joue une suite d'accords sans les afficher, l'élève doit les retranscrire. Le logiciel n'a pas encore la possibilité de générer une infinité d'accords pour créer des dictées difficiles. En continuant le développement informatique et en couplant l'ordinateur à un arrangeur, la qualité du jeu pourra être perfectionnée.

Le Quatre Quatre

Se joue à deux joueurs minimum accompagnés par l'ordinateur. Un premier joueur fait une phrase mélodique de quatre mesures selon l'accord proposé et dirige le parcours vers un autre accord de son choix en passant la main au joueur suivant. Ceci évoque le jeu que les musiciens de Jazz aiment pratiquer en se passant la main lors d'une improvisation avec une grille bien définie. Avec le logiciel, le joueur choisit l'accord à venir pour son collègue. La structure musicale du morceau est dans ce cas perdue, mais l'intérêt ludique demeure.

6.3.1.3. En conclusion

Le jeu est au centre de l'interaction entre le musicien et son univers, ainsi qu'au cœur de la relation entre la pédagogie et la musique. En allant plus loin qu'avec les méthodes classiques d'enseignement de l'improvisation, le "Serious Game" dans ce cadre est un outil avantageux. Ludique, efficace et peu contraignant, il change notre façon de concevoir l'apprentissage et apporte une alternative à la pratique de l'improvisation musicale. Nous présentons au paragraphe suivant des résultats

expérimentaux du jeu "Follow me", où nous avons testé les limites du pianiste.

6.3.2. Suivi de parcours avec un pianiste de Jazz

Pour cette expérience Jazz, nous avons travaillé avec des enchaînements d'accords, et une rythmique inspirée de *So-What* de Miles Davis²³⁸. En suivant le modèle *Planet*, il y a, en chaque point, quatre possibilités de modulation qui correspondent aux quatre accords mineurs ayant une note commune avec l'accord en cours²³⁹. Le fait d'utiliser des accords mineurs sans relation fonctionnelle entre eux nous place bien dans un cadre de Jazz modal. La différence primordiale avec une session traditionnelle est que le musicien ne connaît pas la grille par avance et ne calcule ses enchaînements qu'au dernier instant.

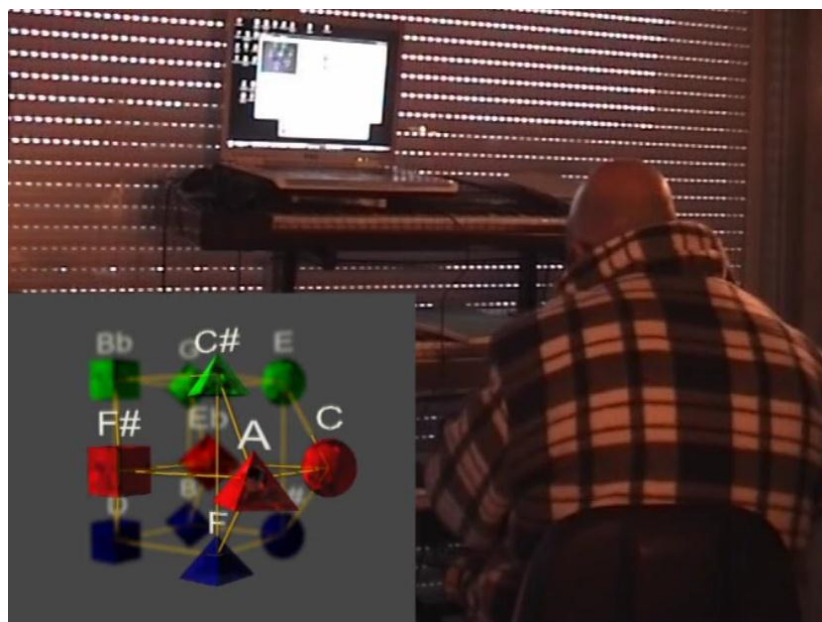


Figure 6-7 : Une séance d'entraînement Jazz avec *Planet-Loops*

Le système a été testé avec Laval Fabien, pianiste professionnel expérimenté, qui a pris plaisir au jeu de découvrir le prochain accord à la volée. Au contraire, par exemple, d'un rappeur, qui a besoin de stabilité harmonique, le musicien de Jazz aime souvent les modulations et tire une partie de son plaisir à improviser en suivant une grille d'accords changeants. Il est très sensible à l'harmonie, et habitué à suivre une grille ou un ensemble de musiciens à l'oreille. Dans le cas présent, le pianiste jouait une partie d'accompagnement composée d'accords à la main gauche

²³⁸ Ce morceau est un standard très connu et typique du Jazz modal, la grille comporte huit mesures de *ré mineur* (noté D-, parfois appelé dans ce contexte *ré dorien*) suivies de huit mesures de *mi bémol mineur* (noté E^b - parfois qualifié de *mi^b dorien*).

²³⁹ Par exemple, si nous sommes en *do mineur*, les quatre possibilités seront *la mineur*, *mi^b mineur*, *la^b mineur* et *mi mineur*.

et une partie solo à la main droite. L'improvisation s'est déroulée en deux temps. Pour l'introduction du morceau, l'ordinateur marquait le tempo avec pour seul instrument le "Charley"²⁴⁰ tout en affichant à l'écran le parcours harmonique proposé. Le pianiste improvisait en suivant la grille dynamique. Une fois le musicien décidé, et à sa demande, le logiciel a ajouté une ligne de basse ainsi qu'une batterie plus complète en vue de simuler le contexte du trio dans lequel le pianiste joue des accords adaptés à gauche et une partie mélodique, thème ou chorus, à droite.

Dans cette expérience, c'est l'ordinateur qui décidait du parcours d'accords. La règle étant de passer par les douze sommets du modèle une fois et une seule²⁴¹. Il est quasiment improbable que le musicien puisse deviner le prochain accord parmi les quatre possibilités. Chaque séquence durant quatre mesures (à tempo 140), la proposition apparaissait à l'écran au début de la dernière mesure, soit moins de deux secondes avant le changement d'accord. Le pianiste avait assez de temps pour penser l'enchaînement à venir, et le préparer. Le résultat donne un Jazz dans le style souhaité, mais qui ne comporte pas de fonction tonale. Il n'y a pas de discours ou de construction de la composition, *a contrario* de *So What*, où le morceau a été composé, possède une structure, commence et termine dans la même tonalité. Un temps d'adaptation assez court (environ deux minutes) a été nécessaire afin que le musicien s'habitue à la partition 4D. Le fait que les accords soient notés de façon internationale, comme pour la plupart des grilles de Jazz, crée un environnement assez familier pour le musicien et a facilité son adaptation à la représentation. Les images ont été tournées en direct avec une caméra DV, le son a été enregistré directement à la sortie de l'instrument afin de garder la qualité originale. Le piano employé est un piano numérique, que le musicien utilise en concert. Pour le "clip" final, l'image affichée sur l'ordinateur portable, filmée pendant l'expérience n'étant pas en mesure de monter le parcours de façon pertinente, nous avons superposé une animation en images de synthèses. Le fait d'avoir enregistré la démonstration avec un excellent pianiste et un son de qualité permet de monter la vidéo comme exemple de réalisation. La vidéo jointe sur le DVD est un extrait des premières minutes de l'expérience, la figure 6-7 ci-dessus est une image extraite de cette vidéo illustrant la mise en situation.

En conclusion, le pianiste a apprécié l'expérience et pensait "pouvoir continuer sans fatiguer". Il serait approprié de refaire l'expérience avec plusieurs musiciens. Pour améliorer le système et mieux l'adapter au travail du Jazz, il faut compléter la série des accords possibles, prévoir un mode où chaque nœud du graphe symbolise une cadence typique (II-V-I ou autre) selon différents modes : majeurs, mineurs, etc.

6.3.3. Test ludique des limites du pianiste de Jazz

Toujours avec le même pianiste, nous avons, dans un deuxième temps, augmenté progressivement la fréquence de changement entre les modulations, forçant ainsi le musicien à des efforts de concentration et de

²⁴⁰ Charley, abréviation argotique de Charleston : la paire de cymbales commandée par le pied gauche du batteur. Frappée fermée, elle sert à marquer le tempo.

²⁴¹ Cela correspond, en théorie des graphes, à un chemin hamiltonien.

calcul de plus en plus grands²⁴². En augmentant la fréquence des enchaînements, les phrases musicales deviennent moins remarquables et les passages entre accords sont moins habiles. Ensuite, des fréquences plus grandes n'apportent plus le même plaisir au musicien. Le standard *Giant Steps*, composé et interprété par John Coltrane, est un morceau réputé difficile à jouer où les accords s'enchaînent aussi selon des tierces et bien plus rapidement que dans cette expérience. Notre pianiste sait jouer et peut improviser sur *Giant Steps*, même rapidement, sans difficulté car, dans ce contexte, la grille est connue d'avance. Le test des limites décrit ici est novateur, car les enchaînements ne sont pas prévus et ne sont pas prévisibles.

Avec cette expérience, l'outil permet de tester les capacités et la vitesse d'adaptation du musicien. Afin de l'améliorer pour le Jazz il faudra l'utiliser avec une plus grande variété d'accords fondamentaux, de types de parcours, et envisager une interface montrant les deux accords suivants prévus par l'ordinateur ou par un instructeur.

6.3.4. Improvisation à l'orgue de cathédrale

Pour cette expérience, nous avons utilisé un orgue ancien afin de tester si le système de modulations symétriques pouvait fonctionner dans ce contexte. L'orgue de la cathédrale de Saint-Lizier est un instrument récemment restauré dans sa composition d'origine du XVII^{ème} siècle. Le modèle *Planet* ainsi que les *Tonnetze* construits à partir du tempérament égal ne fonctionnent pas en théorie avec le tempérament inégal de l'orgue. La pratique l'a confirmé. Les tests effectués avec l'orgue ont été probants dans la mesure où la musique produite correspondait au résultat attendu et "dérangeait l'oreille" dans certaines tonalités. En effet, un orgue de cathédrale n'est pas accordé au tempérament égal, tel un piano actuel, car cette organisation des sons n'existait pas à l'époque de sa conception. L'orgue privilégie naturellement les tonalités pour lesquelles il a été conçu et est parfaitement adapté à la musique de son époque. Notons que le célèbre "clavier bien tempéré" de J.S Bach n'est pas le tempérament égal que nous utilisons et dans lequel tous les écarts chromatiques sont identiques. Il permet par contre, selon son inventeur, de jouer juste, dans chaque tonalité, avec une couleur différente. Cela n'est pas prévu avec le tempérament d'un orgue original. Par contre, certains harmoniums et les orgues électroniques utilisés dans d'autres lieux de cultes sont accordés au tempérament égal, le système *Planet* pourrait donc fonctionner. L'improvisation s'est déroulée à deux mains et au pédalier en jouant plutôt lentement afin de ressentir les effets souhaités et sans saturer l'espace acoustique de la cathédrale²⁴³.

Ainsi, si la musique module trop rapidement, l'harmonie passée et l'harmonie en cours se chevauchent, ce qui peut donner une impression étrange surtout lorsque les modulations sont éloignées. Lors de cette

²⁴² Dans le cas présent nous avons constaté qu'une fréquence de changement d'accords (suivant le modèle "*Planet*") de deux par mesure 4/4 à Tempo 140 était la limite supérieure pour cet exercice. Cela correspond à un peu plus d'une modulation toutes les secondes (0.85 secondes par accord).

²⁴³ Un son joué dans une cathédrale résonne bien plus longtemps que dans une salle de concert. Il faut tenir compte de ce paramètre lors de l'improvisation et jouer avec la réverbération. C'est aussi valable pour la pratique d'un instrument solo : flûte, trompette,...

expérience, le logiciel ne générât pas d'accompagnement sonore, mais montrait seulement un chemin passant par les sommets du modèle. Seuls les accords voisins²⁴⁴ de la tonalité de base de l'orgue sonnaient effectivement juste. Alors que, pour un clavier bien tempéré, les différences de couleurs harmoniques sont sensibles à l'oreille musicale avertie, et que, pour un clavier électronique au tempérament égal, il n'y a pas de différence de couleur harmonique entre différentes tonalités, les écarts concernant la couleur harmonique perçus avec l'orgue sont énormes, et surtout sensibles à toute oreille, même pour celle d'un non mélomane.

6.3.4.1. En conclusion

Le fait de se déplacer de tierce en tierce créait une impression très inhabituelle, plutôt dérangement alternant "juste" et "faux"²⁴⁵, qui témoigne ainsi acoustiquement que le système *Planet* ne fonctionne pas avec un tempérament inégal. Cela s'entend, bien sûr, pour une oreille ordinaire habituée à la plupart de notre musique conventionnelle.

6.4. PILOTAGE DU LOGICIEL PAR L'INTERPRETE

6.4.1. Génération de musique par un novice

Dans ce paragraphe nous allons rapporter les impressions de différents utilisateurs ayant testé le logiciel en mode interactif avec création automatique des mélodies et des accompagnements. L'utilisateur se met aux commandes du logiciel et teste les effets des modulations et changements de style. Les expérimentations ont eu lieu au muséum d'histoire naturelle de Toulouse (août 2010), lors de soirées publiques (vernissage Annie Merle novembre 2010 Toulouse) et dans un cadre privé.

Nous avons testé les réactions du public avec les trois accords du *Blues*, puis avec douze accords ou suites d'accords.

Pour le *Blues*, nous avons préenregistré trois styles différents dans l'esprit "*Chicago Blues*" pour chacun des trois accords.

Le ressenti est en général ludique, les non musiciens sont enthousiastes de pouvoir interagir avec la musique sans "dissonance". Le *Blues* utilisé étant assez entraînant, c'est un bon point de départ pour attirer des expérimentateurs. Les musiciens avertis sont d'abord dubitatifs face à une représentation tournante, ils essaient ensuite de jouer la grille originale du *Blues* puis se lassent très vite, car les variations sont assez sommaires.

Nous avons ensuite utilisé les modulations à la tierce majeure et mineure entre accords mineurs avec plusieurs styles : électro, jazz, techno, rap. Les utilisateurs non musiciens ressentent bien les modulations, mais,

²⁴⁴ Nous considérons voisins, dans ce cas, des tonalités dont la signature ne diffère que d'une altération ou deux.

²⁴⁵ Le musicologue n'utilise pas les termes juste et faux, mais parle de tempérament différent.

sans savoir en expliquer l'effet, ils n'ont pas la curiosité des musiciens apprenants qui cherchent à comparer les différentes directions de modulation. Ces derniers sont intrigués par le système et sont les plus réceptifs. Les musiciens expérimentés comprennent vite et se lassent car leur créativité est rapidement limitée. Il leur manque d'autres types de modulations et d'accompagnement.

Les accompagnements étant très sommaires, et les modulations restreintes, le système montre vite ses limites pour les musiciens avertis qui ne retiennent que le côté utile pour l'enseignement. En perfectionnant le logiciel, il pourrait être utilisé en pédagogie.

6.4.2. Génération de Techno en direct

Dans cette expérience, nous avons testé la génération spécifique de musique techno avec un musicien habitué à ce style. Les effets de modulation sont extrêmement rares, voire absents de la musique techno. Certains parmi les musiciens techno ne connaissent pas le solfège, en ont même presque peur par principe, ou bien n'en ont pas besoin pour exercer. D'apparence facile et très répétitive, la musique techno requiert des connaissances et aptitudes différentes de la musique classique. Les musiciens opérant derrière leurs platines s'intéressent à la maîtrise du son et à l'interaction avec le public de danseurs pendant de très longues heures. Si elle ne module pas, la boucle principale change très fréquemment et varie selon des paramètres autres que l'harmonie ou la mélodie : par exemple le timbre, le placement spatial, le mélange avec des bruitages ou le tempo. L'utilisation de filtres passe-haut et passe-bas associés aux modifications de hauteur est très courante. Les filtres se manipulent en direct durant la performance. Ce sont à la fois le caractère répétitif de cette musique et ses variations dans la continuité qui en font l'intérêt et amènent le danseur vers la transe.

Celui que nous appelons "DJ" préfère se désigner par le terme "*liver*" car il ne passe pas seulement des disques en soirée, mais crée sa musique en direct avec ses boîtes à rythmes et échantillonneurs (*grooveboxes* et *samplers*). Il mélange en direct divers instruments rythmiques à base de boucles avec un minimum de mélodie en jouant avec les effets. Le logiciel *Planet-Loops* permet de changer la rythmique en direct beaucoup moins facilement qu'avec le matériel habituel (table de mixage, et générateurs de boucles), mais il fut toutefois suffisant pour une première expérience. En général les modulations utilisées en Techno se limitent à parcourir en boucle deux accords proches (par exemple A, A-). Nous avons utilisé pour cet exemple huit types de rythmiques qui ne modulent pas, et six types de mélodies modulantes. Les parties non modulantes sont les percussions et rythmiques, composées de grosse caisse, caisse claire, cymbale fermée et cymbales. Les parties modulantes concernent les instruments produisant une note identifiable, mélodies au synthétiseur, nappes et basses. Les "mélodies" utilisées dans ce cadre ne comportent que peu de notes et les variations sont surtout affectées au timbre. Les lignes de basse ont été ainsi comptabilisées en tant que mélodies²⁴⁶.

²⁴⁶ A cette heure, le logiciel ne gère pas les effets d'accélération et de ralenti utilisés en techno, ce qui n'est pas déterminant car les tests ont été effectués avec moins d'échantillons que pour un morceau habituel et pour des durées de titre plus courtes (de l'ordre de trois minutes).

Les tests ont été effectués avec un DJ compositeur, *liver* et producteur de musique techno, ne connaissant pas le solfège, habitué à travailler avec des logiciels et du matériel du commerce. Il en est ressorti que l'effet de modulation dans cette musique apportait des sensations nouvelles au DJ qui essayait le parcours harmonique comme un nouveau jouet et en appréciait les effets sans avoir besoin d'en connaître le fondement. L'orchestration est très rudimentaire, les modulations à la tierce enchaînées à la suite donnent une impression de progression cyclique sans fin, et ajoutent une touche inhabituelle dans ce type de musique, tout en renforçant l'impression de variation dans la continuité qui laisse intacte la composante rythmique caractéristique de ce style²⁴⁷.

Afin de perfectionner le système pour la "techno live", il faudrait l'interfacer avec du matériel existant dans le but d'utiliser les effets de tempo, spatialisation et variation des fréquences en direct. Le *liver* avec lequel nous avons travaillé souhaite modifier la commande depuis le joystick afin de pouvoir superposer d'autres boucles prédéfinies et piloter des effets. Il est toutefois possible d'utiliser des contrôleurs midi courants pour commander les effets²⁴⁸.

6.4.3. Génération d'accompagnement Rap par le chanteur

Cette rubrique présente une expérience interactive réalisée avec le logiciel *Planet-Loops* adapté au Rap dans le but de tester l'intérêt du musicien et la pertinence des modulations pour ce style.

Dans le style de Rap testé ici, le motif de la boucle rythmique varie peu. Celle-ci est composée d'une séquence répétitive d'accords qui s'enchaînent tout au long des couplets et refrains. La réalisation se veut instrumentalement proche du style *Gangsta-Rap* popularisé par Dr.Dre. Avec le logiciel *Planet-Loops*, nous considérons les sommets du modèle comme des tonalités de base dans lesquelles sera modulée la phrase musicale répétitive. Il s'agit donc, dans ce cas particulier, de vraies modulations au sens tonal du terme, chaque phrase musicale ayant déjà sa propre structure harmonique. L'exemple montré ici utilise les suites d'accords suivantes : {C⁻⁶, B⁷, D⁻, A} pour l'introduction et {C⁻, F⁻, G, C⁻} pour le refrain et le couplet. Entre couplet et refrain, la rythmique et l'orchestration diffèrent, mais la suite d'accords reste la même. Parmi les formes de séquences d'accords possibles prévues pour l'expérience et inspirées de cadences utilisées dans ce style de musique, le chanteur n'en a effectivement utilisé que deux, qui sont assez simples harmoniquement, et proches l'une de l'autre. Les autres suites proposées "sortaient" trop du style choisi.

Ces suites d'accords ont été modulées en direct par le chanteur à l'aide du joystick, selon son appréciation et après un certain temps d'adaptation (plusieurs minutes). Contrairement au musicien de Jazz, le rappeur ne connaissait pas tous les accords et ne pouvait donc pas deviner par avance l'effet produit par une modulation. Il en ressort que, malgré le son

²⁴⁷ Voir les enregistrements audio sur le support multimédia : Clip E 2 Akufen, p. 270.

²⁴⁸ Le joystick associé à "*Planet-Loops*" étant une simple interface, le logiciel peut être aussi bien commandé par un contrôleur familier du musicien, dans lequel il aura affecté certaines touches à la commande des modulations et des changements de styles.

synthétique généré par l'ordinateur, le ressenti est agréable quoique inhabituel pour le chanteur et l'auditeur.

Comme la Techno, le Rap module assez peu en général. On rencontre parfois une ou deux modulations au cours d'un titre, celles-ci s'appliquant au refrain qui est repris dans une tonalité un demi-ton ou un ton plus haut. Il n'est pas aisé, pour un chanteur, de suivre les modulations si elles s'enchaînent trop rapidement. Le rappeur se concentre habituellement sur son phrasé et sur le rythme, l'harmonie étant une composante annexe pour ce type de musique.

Après plusieurs tentatives d'adaptation, il a été remarqué que les modulations ne doivent pas être trop fréquentes afin de laisser au chanteur le temps de s'adapter. L'intervalle adapté correspond à une modulation maximum, toutes les deux ou quatre mesures (à tempo 90). C'est une période de 5 à 10 secondes, soit le temps de déclamer au moins deux phrases. Les tonalités de base diffèrent d'une tierce entre chaque, le passage n'est donc pas trop "abrupt" et le chanteur s'adapte facilement. Il est à noter que, même si le rappeur déclame un texte très accentué rythmiquement, sans mélodie vraiment perceptible et proche de la parole, l'auditeur ressent toutefois l'effet des modulations dans le chant.

6.4.3.1. Au niveau technique

Il a été requis que la voix et la musique soient enregistrées sur des pistes différentes afin de pouvoir retravailler le son au niveau acoustique. L'ingénieur du son a en effet corrigé la bande sonore enregistrée depuis le PC-Portable en y ajoutant de la dynamique²⁴⁹ et en égalisant le son. Ces manipulations n'influencent que l'acoustique et ne changent en rien la composition, elles sont nécessaires pour produire un son se rapprochant de la norme commerciale. Concernant la voix, un léger effet de réverbération a été ajouté et le chanteur a souhaité ajouter des *Backvoices* à l'enregistrement original afin de mieux se rapprocher du style souhaité²⁵⁰. Dans notre cas, n'ayant pas un groupe entier à disposition, les effets de *Backvoices* ont été produits a posteriori par le chanteur. L'ingénieur du son ayant laissé rejouer les pistes de voix et de musique déjà enregistrées dans le casque de l'interprète, ce dernier a chanté les parties de chœur. Celles-ci ont été retravaillées et dupliquées afin de simuler plusieurs choristes, puis elles ont été rajoutées numériquement aux autres pistes. Cette manipulation ne change en rien le ressenti éprouvé par le chanteur ou le public en ce qui concerne les modulations. La forme finale de l'enregistrement est très importante pour l'artiste qui ne peut pas sortir de son style. Le Rap comporte des codes qui sont déterminés. La version sans les *Backvoices* ne fait "pas assez Rap" selon le chanteur (et je partage son avis). Elle ne sera donc pas publiée.

Le clip réalisé comporte des photographies et vidéos de la séance d'enregistrement en studio. Les images du modèle tournant en 3D et 4D rajoutées à l'écran ne correspondent pas aux accords que le chanteur a

²⁴⁹ La "dynamique" ou compression se traduit par "plus de pêche" en langage courant.

²⁵⁰ Les *Backvoices* sont des voix supplémentaires faisant écho à la voix principale. En général, dans le Rap, des chanteurs en fond de scène, répètent les mots clefs en faisant "yeah" !

choisis et chantés. Afin de différencier la partie réelle de l'image virtuelle, les photos et vidéos sont en noir et blanc, les images du modèle en couleur.

6.4.3.2. En conclusion

Le principe est bon, mais le Rap comporte tout un environnement qu'un modèle mathématique harmonique ne peut décrire, les sons gagneraient évidemment à être produits par de vrais musiciens. Ceci dit, on voit qu'il est possible de composer une grille et de la laisser interpréter et remixer par un groupe de Rap. L'expérience décrite ici avait pour but de tester l'interactivité tout en produisant un clip acceptable musicalement. Afin d'améliorer le système pour le Rap, il faudra utiliser des sons plus modernes, des boucles plus réalistes.

6.4.4. Les autres modulations

Selon une idée que m'a soumise Pierre Jodlowski²⁵¹, il convenait de tester la différence de perception par diverses personnes entre des modulations symétriques issues du modèle *Planet* par rapport à d'autres modulations. Les modulations et leur perception font l'objet de nombreuses études²⁵². Nous avons remarqué que la perception varie selon le niveau d'éducation du musicien. Lorsqu'il contrôle les modulations, le musicien anticipe l'accord suivant. L'ordinateur génère la suite d'accords selon différentes programmations. Le mode *Planet* n'autorise que des modulations à la tierce. La progression chromatique ou par suite de quarte est intuitive pour tous. Les modulations au hasard ne sont remarquées que par l'oreille musicienne.

Dans le mode "*anti-Planet*", l'ordinateur choisit n'importe quelle modulation sauf par tierce, ce mode est ressenti par les musiciens comme celui où le hasard est total car il n'a pas de cohésion. Selon le style le ressenti est différent, des modulations à la tierce ou au hasard donnent un effet bien plus étrange avec un riff de *Blues* qu'avec des boucles "*électro*". Les expériences menées ne permettent pas de tirer de réelles conclusions quant à la pertinence des modulations.

6.4.5. Musique d'ambiance "électro"

La musique d'ambiance à base électronique s'adapte assez bien au logiciel et au système. Nous avons testé ses effets avec différentes combinaisons de parties rythmiques et mélodiques en restant dans une atmosphère "électro" sans rythmique excessive. Dans ce genre de musique, il est aisé de créer des boucles avec une instrumentation changeante et évoluant sans grande discontinuité. Les sons proviennent de synthétiseurs pour les nappes et instruments solo, et de boucles rythmiques (*Drum Loops*) préenregistrées pour la base de la partie

²⁵¹ Correspondance personnelle et entretien mai 2009.

²⁵² Voir les articles de Carol Krumhansl (Krumhansl & Kessler, 1982) et Daniel Muzzulini (Muzzulini, 1995).

accompagnante. Après avoir géré manuellement les passages d'accords en faisant varier très peu l'accompagnement afin de mieux ressentir les effets des modulations, nous avons constaté que les modulations donnaient des effets assez similaires. Le choix des déplacements harmoniques a donc été laissé à l'ordinateur qui a généré de façon aléatoire et en direct le parcours harmonique, l'utilisateur ne "jouant" qu'avec les paramètres de l'orchestration (accompagnement et mélodies). L'utilisateur, qui n'agit que sur les paramètres de l'orchestration, n'est aucunement gêné par les modulations automatiques qui apportent, dans ce cas, la sensation recherchée d'univers clos et de progression infinie. La musique d'ambiance produite a été utilisée en association avec des peintures numériques dynamiques utilisant aussi les principes de symétrie et répétitions à l'infini, (voir chapitre 6.6.2).

Le Clip E 7 GG12 Modes, p. 297, illustre cette expérience où la musique a été générée par le logiciel. L'ordinateur s'est occupé du parcours harmonique, le musicien a géré l'arrangement en choisissant les styles d'accompagnement et les lignes mélodiques parmi ceux proposés. Le parcours de modulation choisi reprend les modulations utilisées pour la composition *Walk*, ce qui a facilité techniquement la production des animations. Les images sont issues de différentes vues extérieures du modèle *Planet* 3D tournant et du modèle 4D se déformant, ainsi que de vues intérieures. Les vues intérieures sont issues du modèle 3D où une caméra cible la position actuelle depuis l'étape précédente, donnant ainsi l'impression de suivre le "vaisseau" depuis un autre vaisseau intérieur.

En conclusion, ce style s'adapte très bien aux modulations symétriques et l'impression de progresser sans avancer est très perceptible. Dans la musique du film d'animation *Das jüdische Viertel von Worms* (Koob & Grellert, 2001), que j'ai composée, le principe des modulations symétriques à la tierce a été utilisé pour illustrer le long générique de fin.

6.5. VIDEOS PEDAGOGIQUES SANS COMPOSITION

Les vidéos pédagogiques ont pour but de montrer de façon plus imagée les relations harmoniques en œuvre dans différents modèles musicaux. Habituellement les modèles sont expliqués sur papier, au tableau ou acoustiquement, ici, nous avons reformulé et colorisé ces modèles en 3D ou 4D. Les accompagnements sonores sont les plus neutres possibles afin que le spectateur se concentre principalement sur la note ou l'accord et sa visualisation, sans focaliser son attention sur les autres paramètres musicaux. Les paramètres rythme, timbre et acoustique sont certes d'importance majeure pour une composition, mais ne sont pas essentiels à la compréhension des modèles présentés. Les notes ou accords sont symbolisés par des volumes 3D, leurs relations par des lignes. Il s'agit toujours de modèles en mouvement, où la position harmonique est centrale et le son synchrone à l'image. Ces vidéos ont été présentées lors de la conférence MCM 2011 à l'IRCAM, Centre Pompidou, ainsi qu'au Palais de la découverte en juin 2011. Elles sont maintenant diffusées lors de performances ou de cours.

6.5.1. Le cercle chromatique

Le cercle chromatique que nous évoquons souvent dans cette étude étant homonyme à celui utilisé en peinture, une relation doit pouvoir se représenter. C'est l'objet de l'animation "Chromatic circle"²⁵³. La relation entre musique et couleur est ancienne, aussi profitons nous de cette étude pour rendre hommage à un physicien surtout célèbre pour sa contribution à la mécanique²⁵⁴, mais peu connu pour ses connaissances musicales²⁵⁵ : Sir Isaac Newton. Voir chapitre 1.1.1 en introduction pour l'historique et l'image du cercle chromatique de Newton.

6.5.1.1. Répartition des couleurs

Nous nous sommes inspirés de la répartition proposée par Newton, et avons tout d'abord choisi de modéliser de façon linéaire la répartition des couleurs ainsi que l'expose la figure 6-8 ci-dessous.

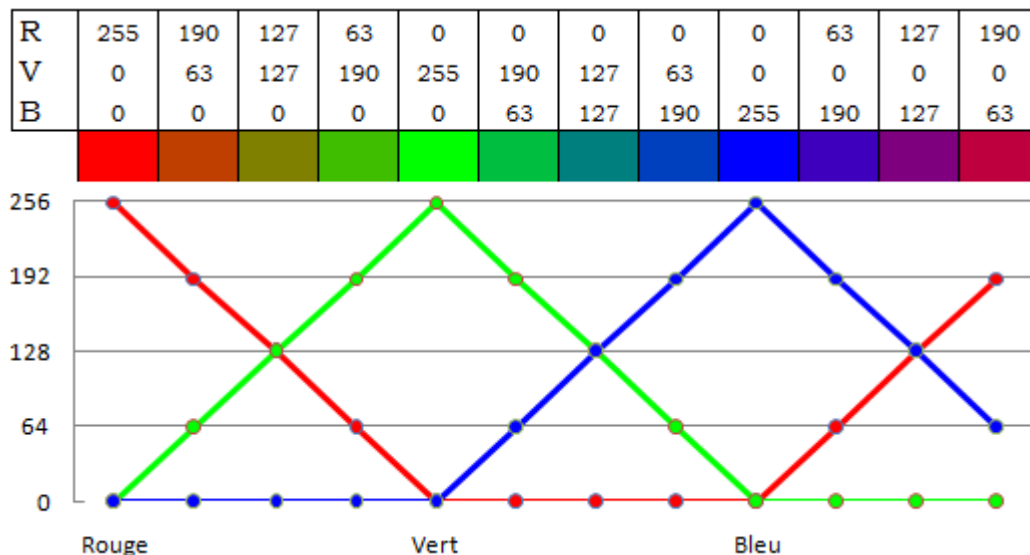


Figure 6-8 : La répartition linéaire des couleurs

Cette variation respecte l'ordre naturel, donc de Newton, mais ne permet pas de bien différencier les verts et ne fait pas apparaître le jaune. Nous avons donc adapté les résultats du calcul linéaire pour que l'œil humain différencie mieux les couleurs (voir ci-dessous, figure 6-9). Lorsque nous considérons un arc-en-ciel à sept couleurs, il est aisé de les différencier, mais pour douze tons, le travail est plus fastidieux. Dans ce cas les couleurs sont bien différenciées et respectent l'ordre de Newton. Nous les avons utilisées pour réaliser la coloration de l'animation du cercle chromatique. Dans cette animation où les notes sont réparties par demi tons et où chacune à une couleur propre, l'effet est garanti.

²⁵³ Voir l'animation Clip F 1 : Circular Representations sur le support informatique joint, p. 268.

²⁵⁴ Voir le livre de Jean-Michel Rocard "Newton versus Relativity" (Rocard, 1992) ou l'auteur démontre que même si Einstein avait raison, cela ne signifie pas que Newton avait tort.

²⁵⁵ Voir la biographie de Newton (White, 1999).

Grâce à cette visualisation, le profane peut pratiquement réaliser que les notes sont des fréquences, ce qui est en général évident pour un musicien.

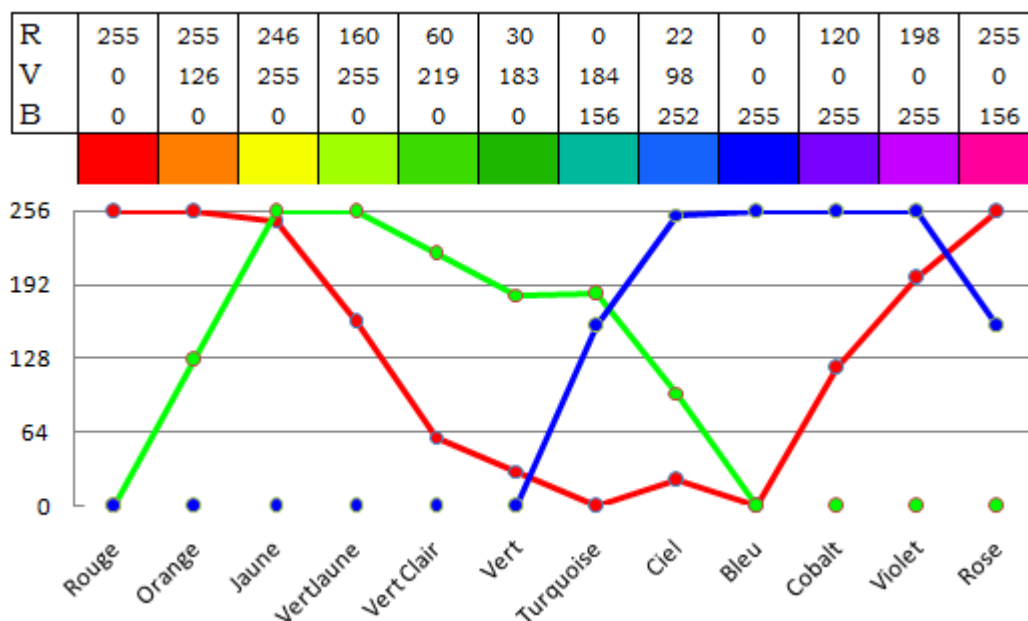


Figure 6-9 : Une répartition humanisée des couleurs

6.5.1.2. Animation du cercle chromatique

Les notes sont réparties de façon chromatique et matérialisées par des sphères le long d'un cercle tournant régulièrement. La sphère la plus proche du spectateur symbolise la position le long du cercle. Elle est soulignée visuellement par un projecteur dirigé sur notre petite sphère tournante, qui reste au centre de l'écran, et illustrée acoustiquement par une note jouée à l'orgue. Le cercle chromatique représente en théorie l'ensemble des notes considérées comme des classes de hauteurs, qui peut être modélisé mathématiquement par le groupe cyclique \mathbb{Z}_{12} , et représenté par le graphe C_{12} . Il y a donc toujours le même écart entre chaque point du dessin. Mais lorsque les notes sont jouées avec un instrument réel, et que le cercle tourne indéfiniment, il y a obligatoirement un écart perçu important (une octave moins un demi ton) entre la dernière et la première note. Une animation avec l'effet de Shepard-Risset²⁵⁶ est aussi disponible (Clip E 10 The Shepard Effect, p. 297).

²⁵⁶ La gamme de Shepard (Shepard, 1964) est une gamme de douze sons composés d'octaves, qui donne l'impression d'une montée sans fin lorsqu'elle se répète. Ce principe est utilisé dans certaines compositions, comme par exemple *L'escalier du diable* de György Ligeti. L'adaptation par Jean Claude Risset évoque un glissando sans fin (Risset, 1986).

6.5.2. La construction du *Tonnetz* et du Tore

En partant du *Tonnetz* original de Riemann, nous lui superposons les symboles du modèle *Planet*. Nous répliquons les symboles pour montrer l'infinité théorique du réseau de notes.

De retour au cercle chromatique, nous traçons le triangle et le carré passant par la note *do*. Ces deux figures associées génèrent un tore 3D, analogue à celui de Guerino Mazzola (Mazzola, 2002). En combinant trois faces carrées et quatre faces triangulaires, nous construisons la structure *Planet-3D*. Cette dernière est une projection fixe du modèle *Planet-4D* qui ne se déforme pas et tourne sur elle-même. L'intérêt de la vue en 3D tournante est surtout de laisser comprendre l'organisation géométrique des notes dans un espace qui ne se déforme pas. L'animation est disponible sur le support informatique (Clip F 3 : Torus and Traditional *Tonnetz*, p. 295).

6.5.3. Construction du modèle *Planet-4D*

Afin de visualiser le modèle en quatre dimensions, nous présentons les deux axes principaux (voir chapitre 2.3.2.1) dans le modèle en trois dimensions. En laissant tourner d'abord les faces carrées, puis les faces triangulaires, le spectateur constate qu'il est impossible de construire la figure en 3D, nous suggérons ainsi la nécessité de l'espace à quatre dimensions²⁵⁷. Voir l'animation Clip F 4 : Combining Two 2D Subspaces, p. 295.

Cette fois, l'animation vidéo est purement 4D, elle illustre de façon sonore le modèle *Planet-4D*. Avec le modèle 4D tournant autour de son centre, et un point de l'espace matérialisé par la petite sphère fixe, le spectateur prend conscience de la symétrie. Ce modèle donne l'impression de se déformer en trois dimensions, puis de revenir à sa forme initiale. L'utilisateur perçoit à cet instant la différence entre 4D et 3D (voir Clip F 5 : The *Planet-4D*, p. 295).

Ici, les sommets du graphe seront considérés tour à tour comme des classes de hauteurs (notes simples) pour créer un espace de hauteurs, puis comme des accords afin de montrer un espace d'accords. Cette dualité est une particularité essentielle du modèle. Afin de séparer les deux approches, nous utilisons deux notations différentes. Si le modèle utilise des classes de hauteurs, les symboles seront des nombres (*do* = 0, *do*[#] = 1, etc.). Si le modèle représente un espace d'accords, nous emploierons les lettres : (A = *la*, B = *si*, etc.)

La séquence introductive montre les notes voisines dans les deux directions. Le chemin passe par les quatre notes du sous-graphe C_4 matérialisé par un carré et contenant les quatre notes {*do*, *mi*^b, *fa*[#], *la*} notées {0,3,6,9}. Puis, en parcourant le sous-graphe C_3 , représenté par un triangle, nous visitons les trois notes suivantes : {*do*, *mi*, *sol*[#]} notées {0,4,8}. Les mêmes chemins sont réutilisés cette fois en considérant les sommets comme des accords mineurs. La partie introductive permet de montrer lentement les effets des rotations 4D, et la symétrie du modèle.

²⁵⁷ "I suppose one might find it necessary to pass into the fourth dimension" (Shell, 2001).

Le cycle des quintes et le cercle chromatique ne sont pas dessinés sur le modèle *Planet*, mais ils sont inhérents à ce dernier (voir chapitre 2.4.4.2). Comme les quintes sont distantes entre elles de deux pas, en termes de graphe, une progression par quinte nécessite deux rotations perpendiculaires du modèle 4D. Nous effectuerons ces deux rotations simultanément, ce qui correspond encore à une déformation en 3D. Lors de cette double rotation, nous sortons bien sûr du chemin tracé (qui va de tierces en tierces), mais restons sur l'hypersphère. Ce passage animé confirme visuellement cette description. L'animation montre le cercle des quintes avec des notes, puis avec des accords majeurs²⁵⁸. Pour la visualisation du cercle chromatique, les mêmes principes s'appliquent, mais la double rotation est perpendiculaire à celle utilisée pour les quintes.

6.5.4. Construction de l'*Hypersphère des Accords*

L'*Hypersphère des Accords* est l'équivalent de l'espace dual du *Tore des tierces*, elle contient les 24 accords mineurs et majeurs à trois sons (voir chapitre 2.6.2).

En revenant au modèle hexagonal plan, après avoir présenté les symboles pour les accords majeur et mineurs (voir chapitre 2.6.1 et l'animation Clip F 7 : 3D Ideograms , p. 295), nous parcourons tour à tour les notes des accords autour du point 0, laissant à chaque fois entendre le son de chaque note puis de l'accord formé.

Nous reprenons la démonstration précédente, cette fois à partir du modèle *Planet-4D* où nous traçons les relations entre quintes. Les accords mineurs et majeurs ainsi que les relations P,L,R de la théorie néo-riemannienne (Cohn, 1997) sont alors dessinés. Les sommets du modèle *Planet-4D* sont ensuite rétrécis afin de laisser la préséance à ceux de l'*Hypersphère des Accords*.

Nous présentons ensuite les propriétés musicales de l'*Hypersphère des Accords* en montrant tout d'abord les voisins de *do majeur* et *do mineur*, puis en illustrant acoustiquement chacune des relations P,L,R. Nous parcourons dans un second temps, comme nous l'avons fait en deux dimensions, un cycle hexagonal autour d'un sommet.

Grâce au système d'idéogrammes à trois dimensions²⁵⁹, l'observateur remarque plus facilement l'organisation des accords. Les homonymes, (par exemple *do majeur* – *do mineur*) partagent le même symbole que *do* (sphère rouge), ils sont voisins et se différencient par la luminosité du symbole. Nous remarquons ainsi que l'ensemble des accords mineurs (idéogrammes sombres) est un volume de même forme que *Planet-4D*. De même, l'ensemble des points représentant les accords majeurs (symboles clairs) est un volume forme identique.

La représentation de l'espace des 24 accords sur une hypersphère en mouvement laisse ressentir la symétrie du modèle. Voir l'animation Clip F 8 : The Hypersphere of Chords, p. 295.

²⁵⁸ L'enchaînement par quintes d'accords majeurs est plus intuitif pour le profane qu'un enchaînement d'accords mineurs.

²⁵⁹ Dimensions idéographiques décrites au chapitre 2.6.1.

6.5.5. Construction de l'*Hypersphère Généralisée*

L'*Hypersphère Généralisée AnySet* est une création originale fondée sur le modèle *Planet-4D*. Elle permet de représenter n'importe quelle combinaison de notes par une position sur l'*Hypersphère* (voir chapitre 2.6.5).

L'animation présente tout d'abord une sphère 3D où sont situées trois notes afin de montrer la différence entre un point au centre du triangle et le barycentre sphérique. Cette démonstration est faite en trois dimensions seulement, une animation 4D n'aurait pas apporté autant de clarté.

Avec l'*Hypersphère Généralisée AnySet*, les douze classes de hauteur doivent être toujours visibles, les notes n'appartenant pas à l'accord étant grisées. La vidéo commence ainsi par une suite de rotations du modèle *Planet-4D*, tous sommets visibles.

La présentation du modèle continue en complexifiant les accords. Nous augmentons le nombre de notes alors que la bande son laisse entendre les notes constitutives, puis l'accord formé. Nous passons en revue des accords choisis contenant *do* en partant de la note seule jusqu'à un ensemble de six notes en passant par les accords courants C^7 , C^{-6} , C^{79} (voir l'animation Clip F 9 : The Hypersphere of *AnySet*, p. 295).

6.6. EXPERIENCES INTER-ARTS

La création et les diverses présentations du modèle *Planet* furent des occasions de rencontrer d'autres artistes venant d'horizons différents et de réaliser des expériences enrichissantes.

6.6.1. Sculpture en verre

En utilisant une projection 3D fixe, il est possible de voir et toucher le modèle 4D, aussi avons-nous réalisé avec Anne Ribout, maître verrier²⁶⁰, une représentation physique de l'objet.

²⁶⁰ Site de l'artiste : www.Ateanne.com

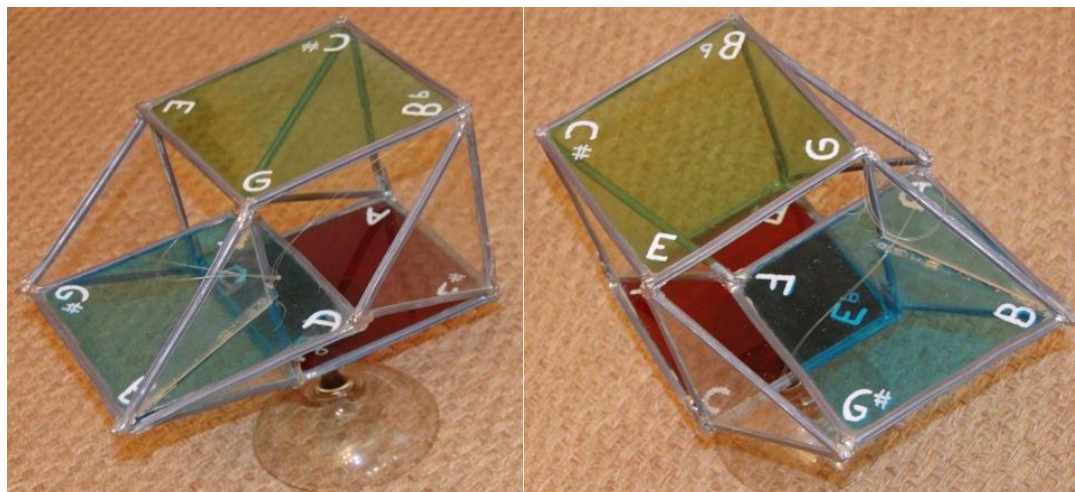


Figure 6-10 : La sculpture en verre et en trois dimensions du modèle *Planet-4D*

Cette sculpture possède sept faces en verre assemblées avec des barres de plomb, comme pour les vitraux. On y distingue les trois faces carrées colorées ainsi que les quatre faces triangulaires. L'objet étant un modèle 4D, nous constatons que certaines faces se coupent dans notre univers 3D. C'est un objet utilisé en conférence pour expliquer le modèle et l'intérêt de la quatrième dimension.

6.6.2. Compositions pour *l'œuvre sans fin*

L'œuvre sans fin est une création logicielle du peintre Charles Giuliani qui reproduit ses techniques de peinture à l'infini. Cette œuvre en perpétuelle évolution s'auto-génère et offre au spectateur, à chaque instant, une image différente de la précédente²⁶¹.

Ayant constaté que nous partagions la même approche d'évolution perpétuelle, de progression infinie, nous avons adapté une musique composée avec le système *Planet* où la symétrie et le système clos donnent la sensation de progresser sans avancer. Cette musique a servi à illustrer certaines vidéos associées à *l'œuvre sans fin* pour des projections cinématographiques ou des expositions. L'analyse de la musique utilisée pour illustrer *l'œuvre sans fin*, "New Planet" est réalisée au chapitre 6.2.4. Le DVD joint à ce mémoire contient le film de démonstration de l'œuvre sans fin utilisé en projection pour le cinéma. (Première au cinéma de l'Union, le 12.12.2008) Voir l'animation Clip E 12 : L'œuvre sans fin, p. 297.

²⁶¹ La première musique qui accompagnait le DVD de "l'œuvre sans fin" fut aussi créée selon des principes d'invariance qui sont étrangers au modèle "Planet". Dans cette première composition, des vagues d'instruments se superposent. Chacun ayant une mesure différente, apparaissent des effets de rythmes entrecroisés qui se rejoignent puis s'éloignent.

6.6.3. Œuvre vivante interactive "Météorologie"

"Météorologie" est une œuvre vivante interactive imaginée par le peintre Charles Giulioli exposée au centre Bellegarde²⁶² de Toulouse dans le cadre du festival musical *Rio-LoCo*²⁶³.

Dans cette œuvre, musique et images évoluent de concert en fonction du climat dirigé par le visiteur à l'aide d'un joystick. La musique et les images évolueront en fonction du temps, le temps étant cette fois pris au sens météorologique du terme. L'installation comporte ventilateurs et anémomètres, lampes et capteurs de chaleur. A l'aide de variateurs, le visiteur modifie la vitesse du ventilateur et la puissance fournie par la lampe, le climat local (vent et température) en est alors sensiblement affecté. Les paramètres analysés par une mini station météo comprenant un anémomètre et un capteur de température sont transmis en temps réel aux ordinateurs générant les images et la musique.

6.6.3.1. Evolution des images

Chaque image est composée de miniatures choisies par l'ordinateur de façon aléatoire et qui se superposent, elle contient toujours les mêmes éléments constitutifs, (symboles et extraits de peintures non numériques), avec des couleurs choisies par l'ordinateur. Ces miniatures apparaissent et s'associent au tableau existant, les anciennes disparaissant peu à peu. Dans cet univers, les images évoluent ainsi en permanence sans jamais se répéter et, ce qui est nouveau, en fonction du climat choisi par le visiteur. Le premier paramètre choisi influence directement la luminosité de l'image numérique. Le second, symbolisant le vent, se manifeste par plus d'agitation dans la peinture. En effet, l'agitation est matérialisée par une fréquence d'apparition de nouvelles images plus importante.

6.6.3.2. Perception des variations musicales

Les éléments météorologiques qui sont générés et observés concrètement par le visiteur influencent la musique de manière sensible et instinctivement prévisible : plus de vent provoque une musique plus agitée et, plus de lumière, une musique plus riche en couleurs. Les concepts de mouvement d'agitation et de richesse de la musique sont subjectifs mais assez intuitifs.

La composition est construite de la façon suivante :

²⁶² Le centre Bellegarde est un lieu culturel très fréquenté qui offre une large place à l'art audiovisuel, et au numérique. Il propose diverses activités culturelles dont des expositions d'art contemporain.

²⁶³ Le Festival *Rio Loco* créé en 1995 associe musique spectacles et expositions, il a accueilli selon les organisateurs environ 100000 visiteurs sur une semaine en 2010.

Météo	Force du vent					
Lumière	0	1	2	3	4	5
0 Batterie		Charley	Rap Light	Rap Full	TekLight	TekFull
Nappe	Nappe Pauvre					
1 Vagues	Nappe Riche					
2 Basse	Mesurée	Temps Marqués			Forte	Double + Electro
3 Piano et Guitares	Guitare	Piano et Guitare		Piano Riff Mini	Piano Riff Partiel	Piano et Perc Riff Complet
4 Cloches	Cloche noire	Clochette Croche			Double Clochette	
5 Cordes et Cuivres	Synthé Lent		Cordes	Cordes+Cuivres Partiels		Cord+Cuivres Complets

Figure 6-11 : Les directions d'évolution de la musique dans *Météo*

6.6.3.3. Le Vent agite la musique

A chaque valeur de vent correspond une "agitation" de la musique. L'agitation n'est pas un terme musicologique, le style évolue de très calme, sans batterie, à très agité (techno) en passant par plusieurs états.

Comme il n'était pas envisagé de faire varier le tempo, nous avons créé des boucles aux rythmes différents, mais toutes au même tempo de 90 bpm. C'est un tempo adapté au Rap, en doublant la basse, nous passons ainsi au tempo 180 bpm qui est un tempo techno assez rapide pour les danseurs²⁶⁴. Le mode "Charley", qui symbolise le temps calme, joue à 45 bpm, ce qui correspond en musique à Largo. Attention, la langue populaire confond parfois rythme et tempo. Le tempo est le nombre de battements par minute (bpm), c'est une grandeur de type fréquence comme les Hertz, alors que le rythme exprime la répartition des sons dans le temps, la distribution des temps forts.

6.6.3.4. La chaleur enrichit l'harmonie

La richesse de l'harmonisation évolue avec la complexité de l'instrumentation utilisée, en ajoutant des instruments à ceux existants. Un temps froid ne contient qu'une boucle de fond assez pauvre. Pour simuler la progression de la lumière, nous ajoutons une seconde nappe plus riche en harmoniques, puis une basse, puis un piano, un xylophone et enfin des cuivres. La complexité de l'arrangement n'est pas subjective, par contre le choix des instruments pour la symboliser l'est. Chaque partie harmonique évolue aussi en fonction du vent. Par exemple, la partie de basse comprend par temps calme une note douce par mesure et progresse vers une basse martelée alternée (type disco), vers la techno. Pour les conditions intermédiaires, la ligne de basse est plus ou moins riche ou syncopée.

²⁶⁴ Les tempi peuvent grimper jusqu'à 250 bpm, ensuite les danseurs ne suivent plus.

La partie appelée "piano" se compose, par temps calme, d'un accord de guitare assez long. Elle évolue ensuite vers un piano électrique dont le nombre de notes jouées et d'accords frappés augmentera avec le vent, pour finir par une boucle de piano à laquelle nous rajoutons un xylophone martelant.

La musique évoluant selon ces deux paramètres choisis par le spectateur, nous obtenons une structure à deux dimensions.

6.6.3.5. Symétrie et mouvement perpétuel

L'intérêt de la symétrie, dans le sens équivalence du terme, est le suivant : lorsque les passages d'accords sont symétriques, car issus d'un modèle géométrique hyper-symétrique, les relations hiérarchiques habituelles entre accords sont abolies, et les fonctions tonales semblent changer de nature. Il en résulte une sensation de progresser sans avancer. Si, de plus, ces modulations sont imprévisibles, l'auditeur les ressentira sans en avoir vraiment conscience.

L'effet de symétrie est obtenu ici en utilisant les modulations du modèle *Planet* en considérant les sommets comme autant d'accords mineurs. L'imprévisibilité est obtenue en parcourant un chemin hamiltonien, c'est-à-dire en passant une seule fois par chacun des accords. Lorsque les douze accords auront été parcourus, un nouveau chemin hamiltonien sera tiré au hasard, rendant quasi imprévisible la progression harmonique. Ainsi le visiteur percevra les effets du climat qu'il façonne (ambiance changeante entre relaxante, Rock, Rap, Techno). Au sein d'un même climat, la musique ne sera pas statique mais continuera de progresser harmoniquement.

6.6.3.6. Déplacements pour l'œuvre "Météo"

La conception de la musique utilisée pour l'œuvre "Météo" est détaillée au chapitre 6.6.3. Lorsque l'ordinateur prend le contrôle du système automatiquement, après un temps de latence, le parcours d'accords suit un chemin hamiltonien tiré au hasard à chaque cycle. Cela concerne l'harmonie seulement. Nous décrivons dans ce paragraphe le processus générant les mouvements aléatoires encadrés, qui concernent les deux paramètres de la sculpture : le vent et la lumière. Les paramètres contrôlant le vent et la lumière varient chacun de 0 à 100 %.

Pour chaque séquence aléatoire, l'ordinateur va essayer d'atteindre une position (vent et lumière) définie. La première minute concerne des mouvements aléatoires autour de la position actuelle. Ensuite, les positions sont représentées par les points A, B, C et D sur la figure 6-12, et détaillées dans le tableau 6-2 suivant :

Tableau 6-2 : Positions à atteindre dans *Météo*

Point	Vent	Lumière
A	100%	0%
B	100%	100%
C	0%	100%
D	0%	0%

Afin que l'ordinateur "essaye" d'atteindre la position prévue, la vitesse de déplacement sera variable. La vitesse varie de façon cyclique en fonction du temps (time) et aussi de façon aléatoire. Pour la partie cyclique, il existe une boucle temporelle d'environ 36 secondes, fonctionnant en tâche de fond qui fait varier cycliquement la vitesse de changement du temps (*weather*). C'est la courbe bleue de la figure 6-12 ci-dessous.

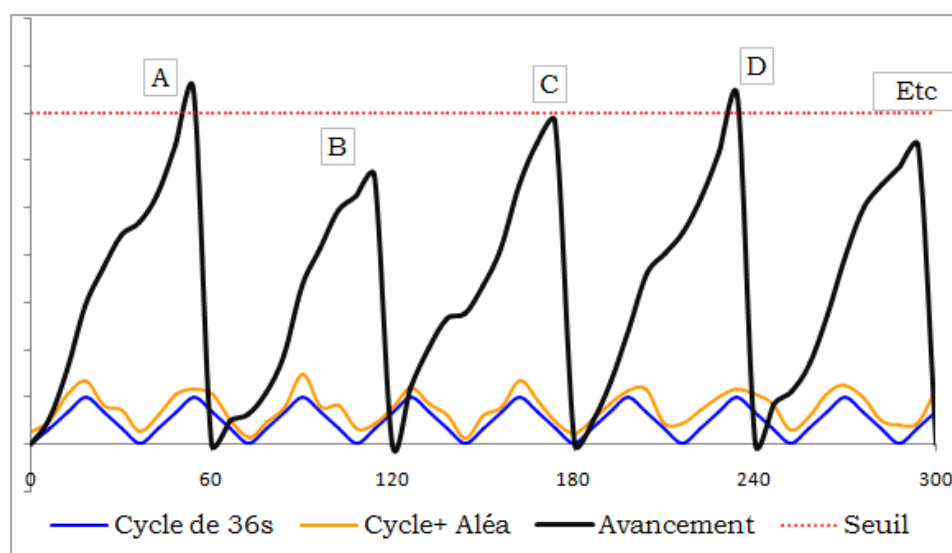


Figure 6-12 : Un exemple d'évolution aléatoire de l'avancement

A cette vitesse cyclique, s'ajoute une vitesse aléatoire, afin de ne jamais reproduire les mêmes mouvements. La courbe orange représente la vitesse totale : la partie aléatoire ajoutée à la partie cyclique.

En intégrant cette vitesse, au sens mathématique du terme, c'est-à-dire en cumulant les déplacements, nous obtenons une position, représentée par la courbe noire. Les points de passage (A, B, C, et D), qui représentent des valeurs extrêmes, doivent être atteints au bout d'une minute. Cette limite (avancement à 100%) est manifestée par une ligne rouge pointillée (voir ci-dessous figure 6-13). Toutes les minutes, objectif atteint ou non, l'avancement revient à zéro, l'ordinateur passe à la prochaine étape et dispose d'une autre minute pour atteindre le prochain point.

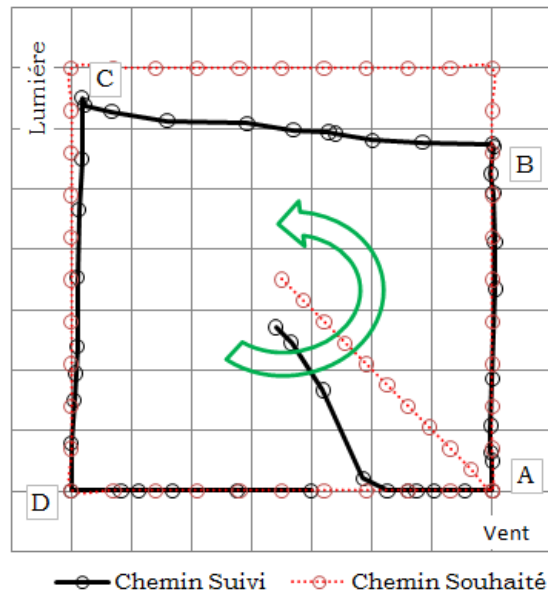


Figure 6-13 : Un exemple de chemin suivi et de chemin souhaité

La probabilité de changement dépend donc de la position le long d'un cycle de 36 secondes et d'un facteur aléatoire.

La figure 6-13 ci-dessus montre, en rouge, le chemin souhaité. Les points le long de ce chemin sont régulièrement espacés, ce qui serait le cas pour une vitesse constante. Le chemin parcouru est dessiné en noir, les cercles représentant les positions ne sont pas régulièrement espacés, car la vitesse change en permanence. La flèche verte indique le sens du déplacement.

Dans l'exemple précis généré ici, nous voyons que le "hasard" a atteint le point A en temps voulu, n'a pas eu le temps d'arriver à B, a presque touché C, et a abouti en D. La figure 6-12 indique l'avancement et son seuil, la figure 6-13 montre l'évolution en termes de paramètres, vent et lumière.

En combinant deux cycles asynchrones plus un déplacement aléatoire, nous générons un parcours aléatoire, encadré, ou parfois l'objectif est atteint. Ceci devrait simuler le fait qu'une prévision météo reste une prévision...

6.6.3.7. Retour d'expérience

L'association des images et de la musique ainsi que l'interaction simple avec le joystick furent généralement appréciées par les visiteurs. Certains adolescents y voyaient un monde psychédélique et auraient souhaité avoir cette installation pour une soirée. La répétition des boucles et la symétrie créent en effet un sentiment envoûtant. Les adultes sont en général assez curieux et demandent qu'on leur explique les principes sous-jacents. En définitive, nous avons remarqué que la fréquence de variation de la modulation doit être réduite par temps calme, alors que le temps agité (Techno) supporte très bien une fréquence de modulation d'un changement toutes les deux mesures.

6.7. LE LOGICIEL INTERACTIF *PLANET-LOOPS*

6.7.1. Cadre du développement

Le logiciel interactif *Planet-Loops* a été développé dans le but de montrer acoustiquement les possibilités d'utilisation du modèle *Planet* et de tester ses limites dans plusieurs environnements expérimentaux. *Planet-Loops* peut être paramétré pour se déplacer dans différents systèmes de représentation ou de placement d'accords. Il peut s'adapter, par exemple, à des parcours entre trois accords de *Blues*, le long d'un *Tonnetz*, ou selon des règles paramétrables prédéfinies. Dans cette étude nous montrerons essentiellement son utilisation avec le système *Planet*. Nous nous plaçons dans un cadre de parcours de modulations, les sommets du modèle étant considérés comme des accords ou des tonalités de base. Le logiciel produit un accompagnement musical dans la tonalité choisie, et propose des possibilités de modulation. Le choix du prochain accord peut être décidé par l'ordinateur ou laissé à l'initiative du musicien ou d'un tiers qui montre le parcours à suivre. Il s'agit en résumé, d'une machine à moduler couplée à un arrangeur basique, contrôlable sans aucune connaissance de solfège.

6.7.2. Les modes de déplacement

Le logiciel indique visuellement et accompagne musicalement un parcours le long d'un chemin sur un modèle harmonique choisi. Selon les cas, le chemin peut être décidé par l'utilisateur, l'ordinateur, ou un tiers (voir chapitre 6.3.1).

6.7.2.1. Contrôle par l'utilisateur

Lorsque l'utilisateur, musicien ou enseignant, est aux commandes, il décide du chemin et se déplace le long du modèle selon les directions possibles. Le changement d'accord se fait toujours à la fin de la boucle lorsque l'ordinateur joue les échantillons pré-programmés, ou immédiatement lorsque le logiciel commande un arrangeur externe.

6.7.2.2. Chemins hamiltonien

Avec le mode hamiltonien, l'ordinateur passe automatiquement d'un accord au suivant le long d'un chemin, à chaque mesure ou autre intervalle défini. Avec le modèle *Planet*, il existe 244 chemins possibles passant par les douze sommets. A la fin de chaque cycle, un nouveau chemin est choisi au hasard par l'ordinateur. C'est le mode utilisé pour l'apprentissage.

6.7.2.3. Déplacements aléatoires

Cette fois, l'ordinateur décide aléatoirement, à la fin de chaque mesure, de la direction à suivre. Il peut rester sur le même accord, avancer dans une des directions possibles ou revenir en arrière.

6.7.2.4. Modes Anti-Planet

Conçus à partir d'une idée du compositeur Pierre Jodlowski, (voir Chapitre 6.4.4), ces modes de fonctionnement permettent de comparer l'effet, chez un auditeur, des déplacements harmoniques de tierce en tierce qui sont à la base du modèle *Planet* avec leur contraire, c'est-à-dire tout sauf un déplacement d'une tierce. Ces modes comportent le suivi continu de cercles chromatiques, de cycles de quarts ou quintes, et aussi de deux modes aléatoires.

Pour le premier mode aléatoire, l'ordinateur choisit n'importe quelle position parmi les huit qui ne respectent pas le modèle (d'où l'appellation *Anti-Planet*). Enfin, avec le dernier mode, le hasard autorise les douze possibilités.

6.7.3. Contrôle du logiciel

L'originalité de l'interaction réside principalement dans le fait que l'utilisateur peut interférer avec la production musicale en cours par l'intermédiaire d'un joystick ou de tout autre interface configurée pour le PC. L'interface est employée pour modifier le style d'accompagnement, la mélodie en cours, et définir l'accord utilisé. Comme pour tous les logiciels commerciaux, les boutons sont accessibles par une touche du clavier de l'ordinateur.

Le joystick, présente un caractère ludique qui rassure le musicien amateur n'ayant pas envie ou besoin de connaître notes et accords et qui désire quand même suivre un *Blues* ou une autre grille. Les déplacements dans l'espace d'accords permettent à l'utilisateur de visualiser et d'entendre les modulations simultanément.

6.7.4. L'environnement graphique

L'interface visuelle montre à l'utilisateur ce que le programme peut faire et ce qu'il fait actuellement. L'environnement présente, à gauche, une représentation de la position actuelle en 3D ou 4D et, à droite, une représentation plane où sont mentionnées les directions possibles de modulation. Les informations concernant les styles et modes sont aussi affichées.

6.7.5. Création des échantillons

Lors de la création de ces échantillons, le concepteur doit s'attacher à moduler, et non à transposer pour éviter des différences d'écart de hauteur

globale trop important entre deux accords. Ceci se rapproche de la technique de Shepard (décrite en note²⁵⁶ p. 277).

Si la forme de la ligne de basse ou de l'accord est simplement transposée, la répartition des écarts perçus n'est pas symétrique. Prenons par exemple, un accord à trois sons construit dans l'ordre tonique, médiate, dominante. Il s'écrit aussi {0, 4, 7} ou encore {do, mi, sol}. Si nous gardons cette forme et la transposons le long d'une droite, il y aura un écart de $\frac{1}{2}$ ton entre chaque voisin de la gamme chromatique, sauf entre le dernier et le premier où l'écart sera maximal et atteindra 11 demi-tons. Car si la transposition est bien une symétrie qui ne change pas la forme de la mélodie, elle s'applique le long d'une droite. Dans notre cas, c'est la forme de l'accord qui va changer afin d'éviter ce saut obligatoire avec un fonctionnement par transposition. La figure 6-14 ci-dessous montre sous forme d'éditeur de grille²⁶⁵ : à droite, un accord systématiquement transposé et, à gauche, l'effet de modulation. Chaque couleur représentant une suite chromatique de notes.

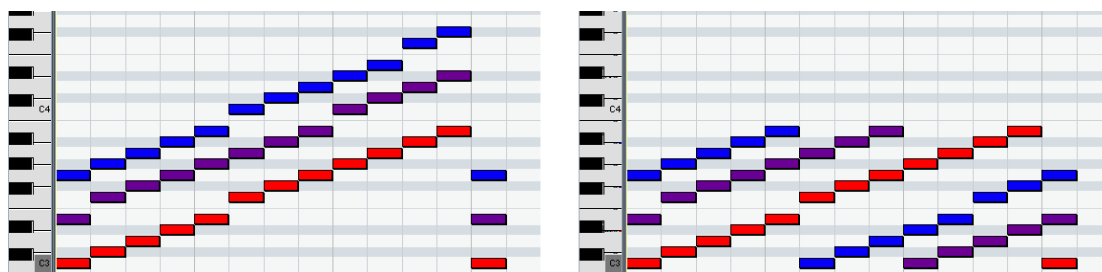


Figure 6-14 : La différence entre transposition et modulation sous forme de grille

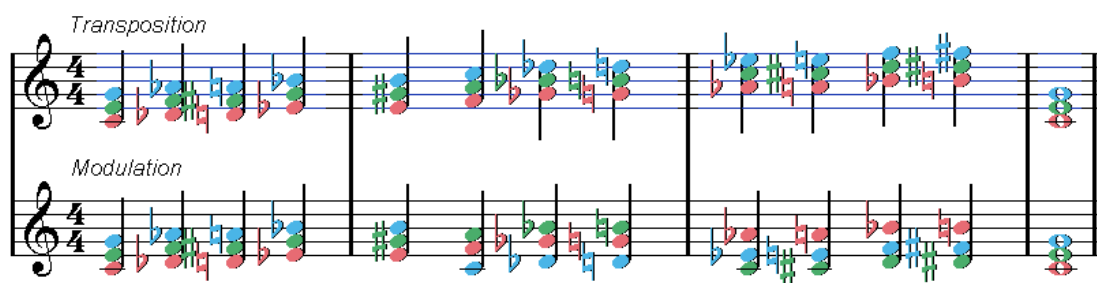


Figure 6-15 : La différence entre transposition et modulation sous forme de partition

La figure 6-15 ci-dessus montre, sous forme de partition, au-dessus, une suite d'accords transposés et, en dessous, l'effet de modulation.

Certes, avec ce principe, la forme de l'accord composant le style varie. La perception du rythme étant principale pour la reconnaissance d'un motif, et le fait d'éviter de grands écarts étant essentiel, c'est la solution la plus appropriée.

²⁶⁵ L'éditeur de grille (Grid edit) est un outil permettant de visualiser et manipuler les notes sans connaître la représentation traditionnelle par partition.

6.7.6. Développements envisagés

Ce logiciel montre différents modèles harmoniques, produit de la musique, et des images. Il a été conçu à titre expérimental. Pour devenir un outil commercialisable, il aura besoin des améliorations suivantes :

- Intégrer d'autres modèles harmoniques et types d'accords.
- Pouvoir pondérer les déplacements.
- Piloter d'autres logiciels de génération de musique.
- Piloter un logiciel qui simule un groupe complet.
- Utiliser un moteur de jeu vidéo pour des déplacements en 3D.
- Créer une vision stéréoscopique.
- Créer un mode avec portes, couloirs, et passages comme dans un jeu vidéo.

Une option intéressante serait d'utiliser les concepts de *Planet-Loops* afin de créer un plug-in pour un logiciel commercial existant et déjà stable. Ce plug-in gèrerait les modèles harmoniques et déplacements le long de parcours ainsi que les visualisations 2D, 3D et 4D, laissant la partie production musicale à un système éprouvé.

Thèse en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Université Toulouse II-Le Mirail - Laboratoire LLA- Créatis

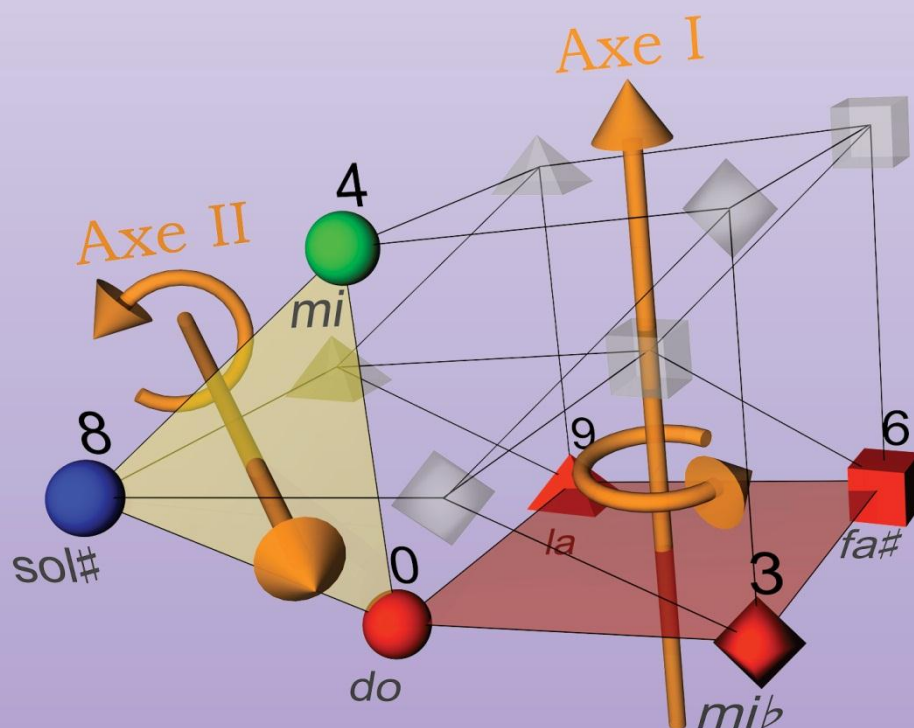
• Spécialité Musique •

Présentée et soutenue publiquement par

Gilles BAROIN

Le 5 décembre 2011

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index




Les annexes vidéo sont en libre accès sur internet




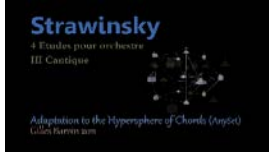


www.Mathemusic.net

L'annexe multimédia est présentée sous forme de DVD joint à ce mémoire. Elle contient les animations des exemples musicaux étudiés, les expériences ainsi que le film d'animation "*From Circle to Hyperspheres, when Tonnetze go 4D*".

Exemples étudiés


Animations et exemples musicaux présentés au chapitre 3.5, p. 215., les fichiers sont dans le répertoire "Analyze".

Exemples Etudiés	Contenu	Fichier
	Clip A 1 Sweet Home Chicago	A01 Blues Brothers
	Clip A 2 Coltrane's Steps	A02 Coltrane's Steps
	Clip A 3 Beethoven and the Hypersphere	A03 Beethoven and the Hypersphere
	Clip A 4 Hamiltonian Path on the Hypersphere	A04 HamilSphere
	Clip A 5 Baby Alone in Hyperspace	A05 Baby Alone
	Clip A 6 Cold Planet	A06 Cold Planet
	Clip A 7 Chopin Circular Space	A07 Chopin Circular and Hypersphere

Exemples Etudiés	Contenu	Fichier
	Clip A 8 Beethoven and the Hypersphere of <i>AnySet</i>	A08 Beethoven and the Hypersphere (AnySet)
	Clip A 9 Hamiltonian Path on the Hypersphere of <i>AnySet</i>	A09 HamilSphere (AnySet)
	Clip A 10 Chopin Circular Pitch Space <i>AnySet</i>	A10 Chopin Circular and Hypersphere (AnySet)
	Clip A 11 Stravinsky's on the Hypersphere	A11 Strawinsky
	Clip A 12 Schoenberg on the Hypersphere	A12 Schoenberg
	Clip A 13 Webern on the Hypersphere	A13 Webern

Film d'animation

Film d'animation "*From Circle to Hyperspheres, when Tonnetze go 4D*" est présenté lors de la MCM 2011, Ircam Paris. Voir (Baroin, 2011b)

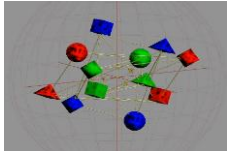
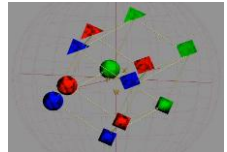
Titre	Contenu	Fichier
	From Circle to Hyperspheres, when <i>Tonnetze</i> go 4D.	From Circle to Hyperspheres

Ce film est fractionné en chapitres pour un accès direct pendant la lecture de ce mémoire. Le tableau ci-dessous référence les chapitres.

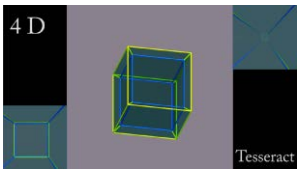
Chapitre du film	Contenu	Fichier
	Clip F 1 : Circular Representations	Mcm 2011 Chap 01
	Clip F 2 : Planar <i>Tonnetze</i>	Mcm 2011 Chap 02
	Clip F 3 : Torus and Traditional <i>Tonnetze</i>	Mcm 2011 Chap 03
	Clip F 4 : Combining Two 2D Subspaces	Mcm 2011 Chap 04
	Clip F 5 : The <i>Planet-4D</i>	Mcm 2011 Chap 05
	Clip F 6 : Traditional Chordal Space	Mcm 2011 Chap 06
	Clip F 7 : 3D Ideograms	Mcm 2011 Chap 07
	Clip F 8 : The Hypersphere of Chords	Mcm 2011 Chap 08
	Clip F 9 : The Hypersphere of <i>AnySet</i>	Mcm 2011 Chap 09

Projections spectrales

Les clips suivants illustrent les projections spectrales (voir chapitre 2.2.5)

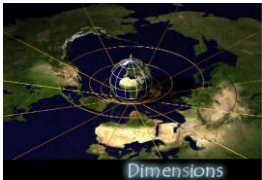
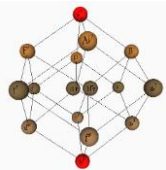

Animation	Contenu	Fichier
	Clip 1 : <i>Planet Graph E1</i> 4D Projection du <i>Graphe Planet</i> dans son sous-espace propre E1.	<i>Planet Graph E1</i> 4D.avi
	Clip 2 : <i>Planet Graph E3 E4</i> 4D Projection du <i>Graphe Planet</i> combinée dans les sous-espaces q propres E3.et E4.	<i>Planet Graph E3 E4</i> 4D.avi

Construction des hypercubes.

	Clip 3 : Hypercubes Construction des carrés, cubes tesseract et pentaracts	Hypercubes.avi
--	--	----------------

Autres sources

Les clips suivants ont été fournis avec l'aimable autorisation de chacun des auteurs. Ils ne doivent pas être diffusés sans autorisation.

Animation	Contenu	Fichier
	Clip O 1 : Dimensions Math, l'hypersphère Extrait de Dimensions Math (Ley et al., 2008)	Dimensions_3 français
	Clip O 2 : Chopin 4D by Tymoczko Prélude de Chopin dans l'espace 4D de Tymoczko	NewChopin 4D by Tymoczko
	Clip O 3 : Chopin Circular Pitch Space by Tymoczko	Chord Geometries by Tymoczko

Expériences

Les animations suivantes sont les illustrations des expériences décrites en Annexe 1.

Animation	Contenu	Sous-répertoire
	Clip E 1 Walk	E01 Walk
	Clip E 2 Akufen	E02 Akufen
	Clip E 3 New Planet	E03 New Planet
	Clip E 4 Ellipsong	E04 Ellipsong
	Clip E 5 Double Jeu	E05 Double Jeu
	Clip E 6 Serial Case	E06 Serial Case
	Clip E 7 GG12 Modes	E07 GG12 Modes
	Clip E 8 LavalHamilton	E08 LavalHamilton
	Clip E 9 Sa Vie Défiler	E09 Sa Vie Defiler
	Clip E 10 The Shepard Effect	E10 Shepard
	Clip E 11 : Météo	E11 Meteo
	Clip E 12 : L'oeuvre sans fin	E12 OeuvreSansFin

Thèse en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE
Université Toulouse II-Le Mirail - Laboratoire LLA- Créatis

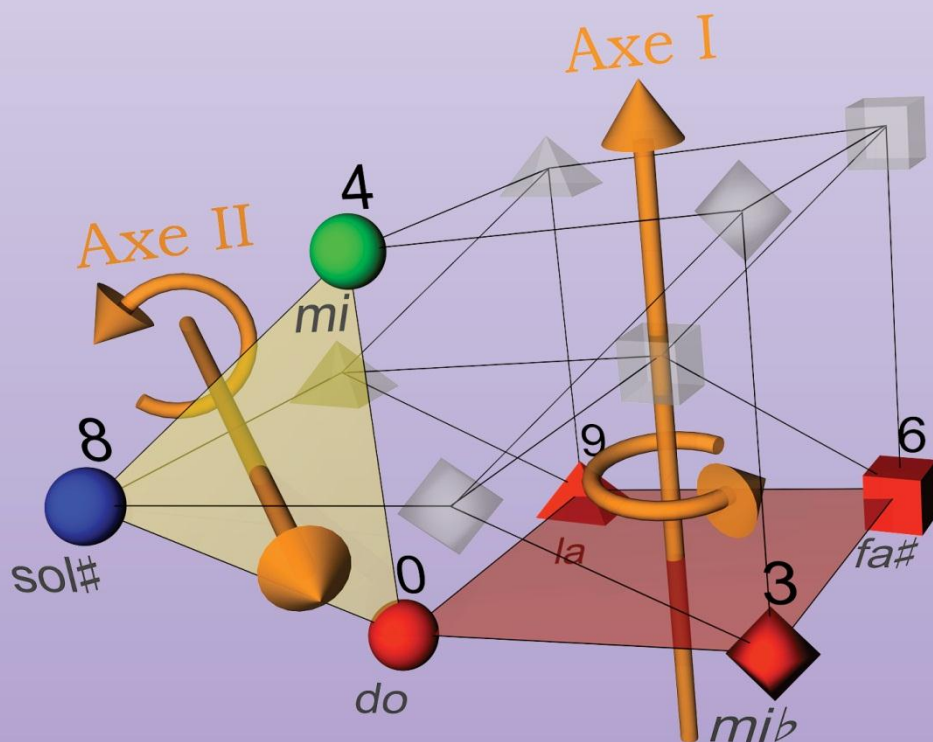
• Spécialité Musique •

Présentée et soutenue publiquement par

Gilles BAROIN

Le 5 décembre 2011

Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux. Modélisations, visualisations en hyperspace



Partie 1 - Introduction

Partie 2 - Étude mathématique

Partie 3 - Applications mathémusicales

Partie 4 - Conclusion

Bibliographie

Annexe 1 - Expériences et applications

Annexe 2 - Multimédia

Index

Index des noms propres

A

Albini, Giovanni ..191, 215, 216, 221, 226, 232, 293, 294
 Amiot, Emmanuel45, 106, 143, 238
 Andreatta, Moreno.....20, 28, 39, 169

B

Bach, Carl Philipp Emanuel 28
 Bach, Johan Sebastian 28, 269
 Bair, Jeff 217
 Balzano, Gérard 96
 Bartók, Bela 109, 110
 Beethoven, Ludwig von 27, 133, 193, 215, 216, 218, 219, 221, 226, 232, 293, 294
 Bertin, Jaques33, 115, 131, 148
 Brahms, Johaness..... 215, 221, 293

C

Cayley, Arthur 45, 64, 67, 70, 95, 131, 168, 237
 Chew, Elaine 131, 154
 Chopin, Frédéric .120, 168, 215, 216, 224, 226, 293, 294, 296
 Chouvel, Jean-Marc 109, 131
 Chung, Fan 47, 76
 Cohn, Richard193, 196, 197, 198, 199, 218, 232, 238, 279
 Coltrane, John.....217, 232, 269, 293
 Coxeter, HSM Donald 3, 24, 241

D

Descartes, René 39
 Douthett, Jack.....108, 190, 198, 209, 213, 214, 232, 238, 240

E

Escher, Maurits Cornelis 24
 Euler, Leonhard 21, 169, 170

F

Fiore, Thomas 218
 Forte, Allen 20, 40

G

Gollin, Edward 169

H

Hamilton, Rowan 95
 Hayden, Brian 163, 164, 167
 Hook, Julian 131, 132
 Hyer, Brian 131

J

Janko, Paul von 70, 164, 167
 Jodlowski, Pierre 274, 288

K

Krumhansl, Carol..... 131, 239, 274

L

Lederman, Leon 24
 Lewin, David..... 136, 215
 Ley, Joss 87, 296

M

Mazzola, Guerino 21, 31, 55, 96, 104, 117, 238, 278
 Messiaen, Olivier..... 24, 109

N

Newton, Issac 19, 168, 276
 Noether, Emmy 24, 113
 Noll, Thomas 67, 84, 85, 96, 225

P

Platon 24
 Purcell, Henry..... 215, 222, 223, 293
 Purwins, Hendrick 131

R

Riemann, Hugo..... 21, 162, 170, 196, 199, 278

S

Saussure, Ferdinand de 32
 Schoenberg, Arnold ... 173, 175, 216, 228, 239, 294
 Steinbach, Peter 108, 190, 209, 213
 Stravinsky, Igor 216, 226, 294

T

Tymoczko, Dmitri 118, 119, 120, 168, 215, 224, 225, 226, 238, 240, 296

W

Weber, Gottfried 129, 171, 172, 173, 174, 175, 179, 183, 185, 188, 193, 202, 203, 204, 207, 213, 214, 232
 Webern, Anton 24, 216, 229, 239, 294
 Weitzmann, Karl Friedrich..... 96, 171, 196, 197, 198, 199, 200, 211, 212, 213, 214, 232, 238
 Wicki, Kaspar 163, 164, 167

**Applications de la théorie des graphes à des objets musicaux.
Modélisations, visualisations en hyperspace**

Résumé

A la frontière entre musique et mathématiques, cette étude présente un espace musical géométrique original utilisé pour l'analyse et la pédagogie.

En utilisant différentes méthodes, les mathématiciens et théoriciens de la musique ont démontré que notre espace des hauteurs tempéré à douze notes peut être considéré comme une combinaison de tierces mineures et majeures. Nous utilisons le produit cartésien de deux graphes circulaires $C_3 \square C_4$ pour construire le graphe Planet qui répond à ce concept. Comme la décomposition implique deux ensembles et que chaque classe de hauteur est la combinaison unique de ces deux sous-groupes, nous utilisons une coloration en termes de graphes par des nombres complexes et introduisons le concept d'idéogrammes à deux dimensions. Nous effectuons une analyse spectrale du graphe Planet pour déterminer ses espaces propres et obtenir des coordonnées géométriques. Le modèle qui en résulte est appelé Planet-4D, il offre à chaque symbole une position physiquement équivalente. Il comporte plus de symétries que tout modèle discret 3D. A partir de ce modèle, nous construisons une représentation en quatre dimensions où les accords parfaits se trouvent en surface d'une hypersphère. Nous étendons enfin le concept principal pour afficher n'importe quel agrégat de notes sur l'hypersphère dans un cadre atonal. Dans une seconde partie, nous modélisons sous forme de graphes des objets musicaux existants : claviers, réseaux de notes (Tonnetze) ou d'accords ainsi que des schémas de modulation. Nous appliquons des projections spectrales afin de visualiser les symétries inhérentes à ces objets et terminons par des études d'œuvres tonales et atonales, effectuées avec le système de visualisation inventé.

Mots-clés : symétrie, mathématiques, musique, hypersphère, espace des hauteurs, espace d'accords, Tonnetz, projection spectrale, théorie des graphes, idéogrammes, infographie, animation, quaternions, Planet-4D, musicologie computationnelle, mathémusical, Set Theory.

Abstract

**Applications of graph theory to musical objects.
Modeling, visualization in hyperspace**

At the frontier between Music and Mathematics, this study presents an original geometrical musical space used for musical analysis and pedagogy.

Using different schemes, mathematicians and music theorists have demonstrated that the tempered twelve tones pitch space can be considered as a combination of minor and major thirds. We use the Cartesian product of two circular graphs $C_3 \square C_4$ to build the Planet Graph that matches this concept. Since the decomposition involves two sets and each pitch class being a unique combination of these two sub-groups, we use a graph coloration based on complex numbers and introduce the concept of bi-dimensional ideograms. We perform a spectral analysis of the Planet Graph to determine its Eigen spaces and obtain geometrical coordinates. The resulting model, called Planet-4D, grants each symbol an equivalent physical position, and involves more symmetries than any discrete 3D model. From there, we build a four dimensional chordal space where perfect chords lie on a hypersphere. We finally extend this concept to display any set of pitches in an atonal context. In the second section we construct the graphs of some existing musical objects such as keyboards, tone networks (Tonnetze), chordal spaces or modulation schemes. We apply spectral projections to visualize the symmetries that are inherent to these objects. This work concludes with musical studies of tonal and atonal pieces, performed with the help of the visualization tools designed in this study.

Keywords: Symmetry, Mathematics, Music, Hypersphere, Pitch Space, Chordal Space, Tonnetz, Spectral Projection, Graph Theory, Ideograms, Animated CGI, Quaternions, Planet-4D, Computational Musicology, Mathemusical, Set Theory.